האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ט
שלב הגמר, שנת תשפ"ב

בעיה 1. (דניאל קנר)
נתונה טבלה של 12 שורות ו-10 עמודות. צובעים את משבצות הטבלה באדום, כתום, צהוב וירוק, כך שבכל שורה:
מספר משבצות ירוקות ≥ מספר משבצות צהובות ≥ מספר משבצות כתומות ≥ מספר משבצות אדומות
ובכל עמודה:
מספר משבצות ירוקות ≥ מספר משבצות אדומות ≥ מספר משבצות כתומות ≥ מספר משבצות צהובות
מצאו את כל האפשרויות למספר המשבצות הירוקות בטבלה. הדגימו את כל אחת מהאפשרויות, והסבירו מדוע אין אפשרויות נוספות.

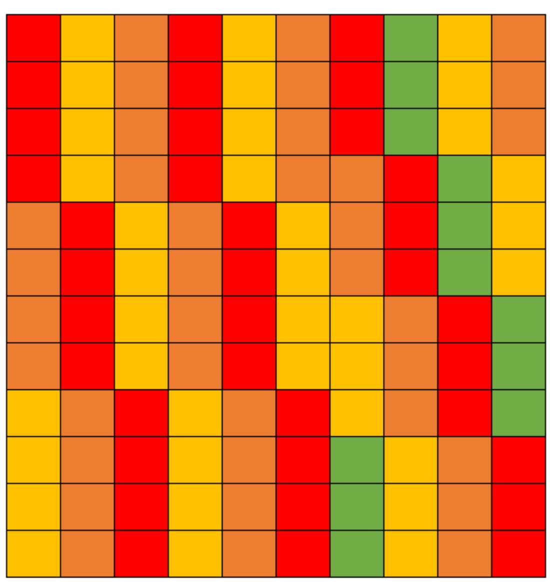
פתרון.

מהתנאי על מספרי המשבצות בשורות אנו יודעים שבכל הטבלה יחדיו מתקיים ש-
מספר משבצות ירוקות ≥ מספר משבצות צהובות ≥ מספר משבצות כתומות ≥ מספר משבצות אדומות

ומהתנאי על מספרי המשבצות בשורות אנו יודעים שבכל הטבלה יחדיו מתקיים ש-
מספר משבצות ירוקות ≥ מספר משבצות אדומות ≥ מספר משבצות כתומות ≥ מספר משבצות צהובות

ולכן חייב להתקיים שבטבלה יש כמות זהה של משבצות אדומות, כתומות וצהובות, יתר על כן שוויון זה חייב להתקיים בכל שורה וכל עמודה.

בכל שורה יש 10 משבצות ולכן אם יש פחות מ-3 משבצות אדומות אז יש לפחות 4 משבצות ירוקות וזה נוגד את הנתון, כמובן שלא יכול להיות שיש 4 משבצות אדומות כי אז יש גם 4 משבצות כתומות וצהובות וזה 12 משבצות בשורה של 10. נסיק שבכל שורה חייבות להיות 3 משבצות אדומות, 3 משבצות כתומות ו-3 משבצות צהובות ומשבצת ירוקה אחת. כיוון שיש 12 שורות נקבל שבטבלה יש 12 משבצות
נשאר להראות שטבלה כזו אכן קיימת, בשביל זה כדאי להגיד גם שבכל עמודה יש 12 משבצות ומטיעון דומה לטיעון שהראנו עם השורות ניתן להסיק שיש שתי אופציות למילוי של עמודה: או 4 משבצות אדומות, צהובות וכתומות ו-0 משבצות ירוקות. או 3 משבצות מכל צבע. כיוון שיש 12 משבצות ירוקות נדע שאנו צריכים לעשות 4 עמודות שבהן יש 3 משבצות ירוקות ו-6 עמודות ללא משבצות ירוקות. עכשיו קל לבנות דוגמה:



בעיה 2. (איתן תירוש)
שלושה תיכונים מחלקים משולש ל-6 משולשים. צובעים את המשולשים שהתקבלו בכחול וכתום לסירוגין, ובכל אחד מהם חסום מעגל בצבע תואם. הוכיחו כי סכום המספרים ההופכיים לרדיוסי המעגלים הכחולים שווה לסכום המספרים ההופכיים לרדיוסי המעגלים כתומים. כלומר, אם רדיוסי המעגלים הכחולים הם r_1, r_3, r_5 ורדיוסי המעגלים הכתומים הם r_2, r_4, r_6, אז $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_5}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}+\frac{1}{r_6}$.

פתרון.
נסמן קודקודי משולש ב-A, B, C , את התיכונים ב-AD, BE, CF, ואת נקודת מפגש התיכונים ב-M. נשתמש בשתי טענות אזר: טענת עזר 1: תיכונים מחלקים את המשולש לשישה משולשים בעלי שטחים שווים. טענת עזר 2: אם מעגל ברדיוס r חסום במשולש בעל שטח S וחצי-היקף p, אז $S = r \cdot p$.

נסדר את המשולשים כך ש- $r_1, r_2, r_3, \ldots$ יתאימו למשולשים $AME, EMC, CMD, \ldots$ וכן הלאה לפי הסדר המעגלי.

בהינתן שתי הטענות, אם נסמן ב-S את השטח של כל אחד מששת המשולשים, ונכפיל ב-S את $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_5}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}+\frac{1}{r_6}$, נקבל $\frac{S}{r_1}+\frac{S}{r_3}+\frac{S}{r_5}=\frac{S}{r_2}+\frac{S}{r_4}+\frac{S}{r_6}$. כלומר:

$$\frac{AM+ME+\frac{AC}{2}}{2}+\frac{CM+MD+\frac{BC}{2}}{2}+\frac{BM+MF+\frac{AB}{2}}{2} = \frac{ME+CM+\frac{AC}{2}}{2}+\frac{MD+BM+\frac{BC}{2}}{2}+\frac{MF+AM+\frac{AB}{2}}{2}$$

וכאן מתקיים שוויון, ולכן גם $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_5}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}+\frac{1}{r_6}$.

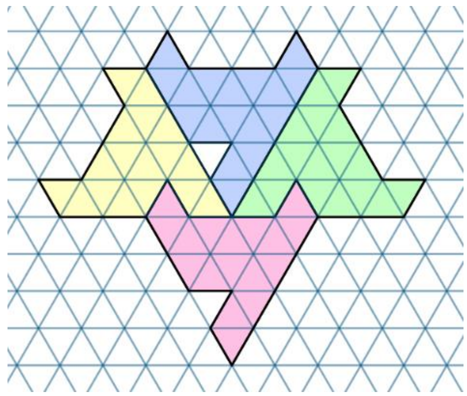
הוכחת טענת עזר 1: $S(AME) = S(EMC)$ כי $AM = MC$ וגובה מ-F הוא משותף. $S(AME) = S(BMD)$ כי $\frac{1}{2}\sin(\angle AME)\cdot AM\cdot ME = \frac{1}{2}\sin(\angle BMD)\cdot BM\cdot MD$ וזה כי $\angle AME = \angle BMD$, $AM = 2MD$, $ME = \frac{1}{2}BM$. לכן כל המשולשים שעל אותה צלע של משולש שווי שטח, וגם משולשים מנוגדים (בעלי זווית קודקודית) גם שווי שטח. לכן כל ששת המשולשים – שווי שטח.

הוכחת טענת עזר 2: אם נסמן ב-I את מרכז המעגל החסום אז $S(AIB) = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot r$. נחבר ונקבל:

$$S(ABC) = \frac{1}{2}\cdot r\cdot(AB+BC+CA)$$

בעיה 3. (איליה גרינגלז)
חתכו את הצורה ל-4 חלקים חופפים.

פתרון.



בעיה 4. (איליה גרינגלז)
עבור מספרים שלמים חיוביים a, b, c ידוע ש-$N = a^8 + b^{10} + c^{12} + 1$ מתחלק ב-5.
א. הוכיחו כי abc מתחלק ב-25.
ב. הוכיחו כי N מתחלק ב-25.

פתרון.
נשים לב שאם x לא מתחלק ב-5 אז $x^2 \equiv \pm 1\ mod\ 5$ ו-$x^4 \equiv 1\ mod\ 5$ כלומר $a^8 \equiv 1$ או $0\ mod\ 5$, $b^{10} \equiv \pm 1$ או $0\ mod\ 5$ ו-$c^{12} \equiv 1$ או $0\ mod\ 5$. נתון ש-$a^8 + b^{10} + c^{12} \equiv -1\ mod\ 5$ ולכן האופציה היחידה היא ש-$a^8 \equiv c^{12} \equiv 0\ mod\ 5$ ו-$b^{10} \equiv -1\ mod\ 5$ ולכן a ו-c מתחלקים ב-5 ולכן abc מתחלק ב-25.
ב. מהפתרון של סעיף א אנו יודעים ש-$b^{10} \equiv -1\ mod\ 5$ כלומר $b^2 \equiv -1\ mod\ 5$ ולכן $b \equiv \pm 2\ mod\ 5$.
נפרק לשני מקרים: אם $b = 5k + 2$ או $b = 5k - 2$, במקרה הראשון מתקיים

$$b^{10} = (5k + 2)^{10} = 2^{10} + 10 \cdot 2^9 \cdot 5k + \binom{10}{2} 2^8 \cdot (5k)^2 + \ldots$$

המחוברים שבהם $5k$ מופיע בחזקה 2 או יותר מתחלקים ב-25, המחובר $10 \cdot 2^9 \cdot 5k$ גם מתחלק ב-25 ו-$2^{10} = 1024 \equiv -1\ mod\ 25$ ולכן במקרה זה $b^{10} \equiv -1\ mod\ 25$.
באופן דומה במקרה השני מקבלים ש-

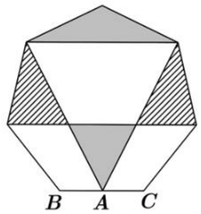
$$b^{10} = (5k - 2)^{10} = (-2)^{10} + 10 \cdot (-2)^9 \cdot 5k + \binom{10}{2} (-2)^8 \cdot (5k)^2 + \ldots$$

ומאותו טיעון בדיוק כל המחובר למעט המחובר הראשון מתחלקים ב-25 ושוב נקבל ש-$b^{10} \equiv -1\ mod\ 25$.
בשני המקרים קיבלנו ש-$b^{10} \equiv -1\ mod\ 25$ בנוסף מסעיף א נובע ש-a, c מתחלקים ב-5 ולכן a^8 ו-c^{12} מחלקים ב-25 ולפיכך $a^8 + b^{10} + c^{12} + 1$ מתחלק ב-25.

האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ט

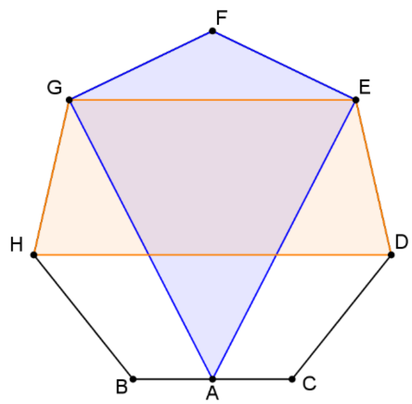
שלב הגמר, שנת תשפ"ב

בעיה 5. (דניאל קנר, איליה גרינגלז)
בתמונה משובע משוכלל, הנקודה A היא אמצע הצלע BC.
איזה שטח גדול יותר: המושחר או המקווקו?

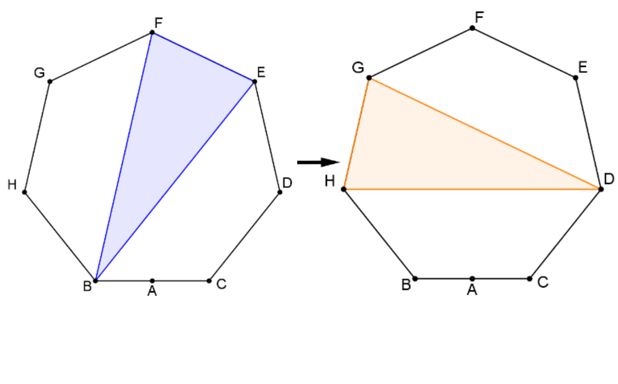


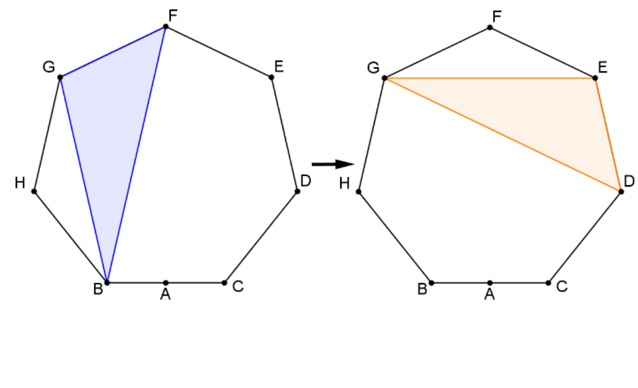
פתרון.

נוסיף לשני החלקים את השטח הלבן באמצע ולכן אנו מעוניינים להשוות בין השטחים של $AEFG$ ו-$DEGH$. $EG||BC$ ולכן השטח של משולש AEG שווה לשטח של המשולש BEG כלומר אנחנו אמורים להשוות בין השטחים של $BEFG$ ו-$DEGH$.



המרובע $BEFG$ מרובה מהמשולשים BEF ו-BEG. נשים לב שאם נסובב את המשולש BEF סביב מרכז המשושה **נגד** כיוון השעון בזווית של $2\cdot\frac{360^\circ}{7}$ הוא יעבור למשולש DGH ואם נסובב את המשולש BEG סביב מרכז המשושה **עם** כיוון השעות בזווית של $2\cdot\frac{360^\circ}{7}$ הוא יעבור למשולש GDE. נשאר לציין כי המשולשים DGH ו-DGE בדיוק מרכיבים את המרובע $DEGH$ ולכן שטחי המרובעים $BEFG$ ו-$DEGH$ וכך גם השטחים המקוריים.

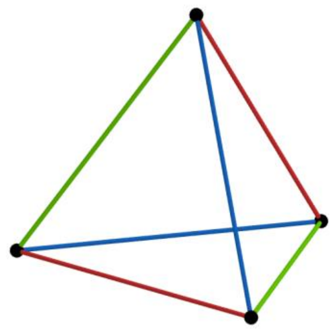




האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ט
שלב הגמר, שנת תשפ"ב

בעיה 6. (אלכסנדר טולסניקוב)
לפנחס יש ערימה של חלקי לגו בצורת פירמידה משולשת משוכללת (כל הפירמידות שוות גודל). פנחס צובע כל מקצוע של כל אחת מהפירמידות באחד משלושה צבעים. שתי פירמידות נקראות *מתאימות* אם ניתן לחבר אותן זו לזו לאורך פאה מסוימת כך שהצבעים בכל המקצועות יתאימו. לאילו כמויות של פירמידות פנחס יכול לצבוע כך שאף שתי פירמידות לא יתאימו?

פתרון.
פנחס יצבע את המקצועות באופן הבא:



אפשר לראות שלא ניתן לחבר שתי פירמידות מסוג זה זו לזו ולכן פנחס יוכל לצבוע כל מספר טבעי של פירמידות שירצה על פי צביעה זו ואף שתיים מהן לא יתאימו.

בעיה 7. (דניאל קנר)
נתונה סדרה:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 5782, \quad a_n = a_{n-1} - a_{n-2} + n$$

מצאו את a_{2022}.

פתרון ראשון: נחשב את האיברים הראשונים בסדרה:

$$a_2 = 5782 - 1 + 2 = 5783, a_3 = 5783 - 5782 + 3 = 4, a_4 = 4 - 5783 + 4 = -5775,$$
$$a_5 = -5775 - 4 + 5 = -5774, a_6 = -5774 + 5775 + 6 = 7, a_7 = 7 + 5774 + 7 = 5788$$

נשים לב ש-$a_6 = a_0 + 6, a_7 = a_1 + 6$ והיות והאיבר הבא בסדרה תלוי רק בשניים הקודמים נסיק שמכאן החוקיות תמשיך -a_{12} יהיה שווה ל-$a_6 + 6$ וגם a_{13} יהיה שווה ל-$a_7 + 6$ וכך הלאה. בסופו של דבר נקבל ש-

$$a_{2022} = a_{2016} + 6 = a_{2010} + 12 = \ldots = a_0 + 2022 = 2023$$

פתרון שני: הנוסחה עבור a_{n+1} היא:

$$a_{n+1} = a_n - a_n - 1 + n + 1 = a_{n-1} - a_{n-2} + n - a_{n-1} + n + 1 = 2n + 1 - a_{n-2}$$

והנוסחה עבור a_{n+2} היא:

$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n + n + 2 = 2n + 1 - a_{n-2} - a_{n-1} + a_{n-2} - n + n + 2 = 2n + 3 - a_{n-1}$$

נגדיל את n ב-3 בנוסחה האחרונה ונקבל ש-

$$a_{n+5} = 2(n+3) + 3 - a_{n+2} = 2n + 9 - 2n - 3 + a_{n-1} = a_{n-1} + 6$$

כלומר במילים אחרות $a_{n+6} = a_n + 6$ ובאינודקציה נקבל ש-$a_{n+2022} = a_n + 2022$ ולכן $a_{2022} = 2023$.
הערה: שימו לב שהפתרון השני לא השתמש כלל בנתון $a_1 = 5782$.