

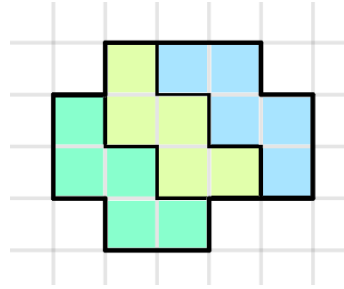


# אולימפיאדת מתמטיקה שדרות תשפ"ה – כיתות ג'-ד'

בעיה 1.

ציירו איך לחתוך את הצורה לשלושה חלקים חופפים (כלומר, זהים גם בצורה וגם בגודל).

תשובה.



הערה. זאת לא האפשרות היחידה.

בעיה 2.

צבעו את הבתים בכחול, צהוב ואדום, כך שיתקיימו כל התנאים הבאים:

- מספר הבתים הכחולים גדול ממספר הבתים הצהובים והאדומים יחד;
- מספר הבתים הצהובים גדול ממספר הבתים האדומים;
- בין כל שני בתים צהובים יש בית אדום;
- אף שני בתים באותו צבע לא סמוכים.

תשובה.



דרך הפתרון.

בגלל שהבתים הכחולים הם יותר מחצי מהכול, ואסור ששני בתים כחולים יהיו סמוכים – האפשרות היחידה לבחור מקומות לבתים הכחולים היא:



נשארו חמישה מקומות לצהובים ואדומים. בגלל שיש יותר צהובים מהאדומים, מספר הצהובים אמור להיות 3 או 4. אבל, אילו היו 4 בתים צהובים, היינו חייבים לפחות 3 בתים אדומים כדי שיהיה בית אדום בין כל שניים צהובים. לכן, מספר הבתים הצהובים יכול להיות רק 3. יתר על כן, ברור שבין כל שני בתים צהובים צריך גם להשאיר מקום בשביל בית אדום:



זה משלים את הפתרון:



הערה: מבחינה מתמטית, הדוגמה מהווה פתרון מלא לבעיה זאת. אבל בעצם, הדרך בה בנינו את הדוגמה, מאפשרת להבין קצת יותר: הוכחנו שצביעת הבתים נקבעת בוודאות. כלומר, התמונה שקיבלנו זה לא רק מה שיכול להיות, אלא מה שחייב להיות (כלומר, זאת האפשרות היחידה לצביעת הבתים).

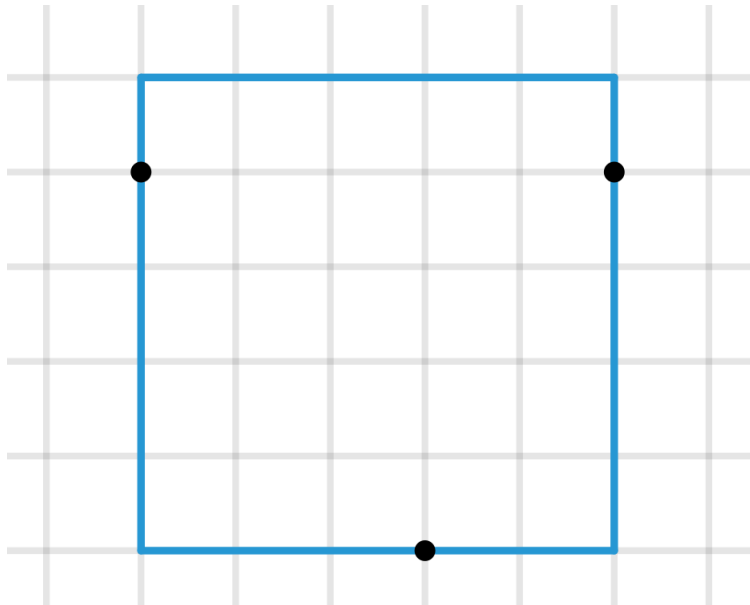


## אולימפיאדת מתמטיקה שדרות תשפ"ה – כיתות ג'-ד'

בעיה 3.

ציירו ריבוע שעובר בשלושת הנקודות המסומנות.

תשובה.



הערה: זאת לא האפשרות היחידה.

בעיה 4.

על הלוח כתוב מספר 3. בכל צעד אפשר לעשות אחת מהפעולות הבאות:

- לכפול את המספר ב-5;
  - להחסיר מהמספר 6;
  - למחוק את הספרה השמאלית ביותר של המספר.
- האם באמצעות פעולות כאלה אפשר להגיע למספר 100? נמקו את התשובה.

תשובה. לא.

פתרון.

נראה שבתהליך הזה אפשר להגיע רק למספרים אי זוגיים. נשים לב שאנחנו מתחילים במספר אי זוגי: 3.

נראה שאף אחד מהצעדים האפשריים אף פעם לא יכול להפוך מספר זוגי למספר אי זוגי:

- לכפול ב-5: אם נכפול מספר אי זוגי ב-5, עדיין נקבל מספר אי זוגי.
- להחסיר 6: אם נחסיר ממספר אי זוגי 6, עדיין נקבל מספר אי זוגי.
- למחוק את הספרה השמאלית: זוגיות של מספר נקבעת לפי הספרה הימנית ביותר. מחיקת הספרה השמאלית לא תשפיע על זוגיות. אז גם במקרה זה, אם נמחק את הספרה השמאלית ביותר של מספר אי זוגי, עדיין נקבל מספר אי זוגי.

מכאן, בגלל שהמספר ההתחלתי אי זוגי, גם המספר הבא אי זוגי. ואז, בגלל שהמספר השני אי זוגי, גם המספר השלישי אי זוגי. באותו אופן גם המספר הרביעי מוכרח להיות אי זוגי... וכן הלאה (הערה: הרעיון להוכחת "שרשרת" של מקרים בה נכונות של כל מקרה נובעת מנכונות של המקרה הקודם, נקרא אינדוקציה מתמטית).

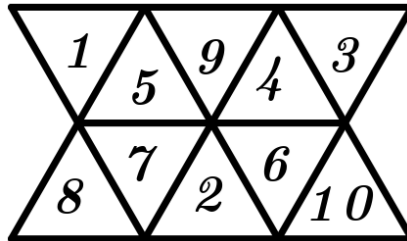


## אולימפיאדת מתמטיקה שדרות תשפ"ה – כיתות ג'-ד'

בעיה 5.

נתונות 10 מרצפות משולשיות עם המספרים 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. רוצים להרכיב מהן צורה שבציוור, כך שסכומים בכל המשולשים של 4 מרצפות יהיו שווים. הדגימו איך אפשר לעשות את זה (מלאו מספרים בתרשים).

תשובה.



בעיה 6.

רשמו במקום הסמלים ספרות שונות מ-0, כך שיתקבל שוויון נכון. סמלים שונים מסמנים ספרות שונות, וסמלים זהים מסמנים ספרות זהות.

$$2 \times \heartsuit \times \heartsuit = \heartsuit 0 \heartsuit$$

תשובה.

$$2 \times 45 \times 45 = 4050$$

דרך הפתרון.

נשים לב שהמספר  $\heartsuit 0 \heartsuit$  הוא כפולה של 5, כי הוא מסתיים ב-0. נתבונן במספר  $\heartsuit \heartsuit$ . בגלל ש- $\heartsuit \heartsuit \times 2$  זאת כפולה של 5, המספר  $\heartsuit \heartsuit$  חייב להיות כפולה של 5 בעצמו. מכאן,  $\heartsuit$  יכול להיות רק 5 או 0, אבל בגלל שנתון שזה לא 0,  $\heartsuit$  חייב להיות 5.

$$2 \times \heartsuit 5 \times \heartsuit 5 = \heartsuit 0 50$$

עכשיו נחפש כמה  $\heartsuit$  יכול להיות שווה.

$$2 \times 15 \times 15 = 450$$

$$2 \times 75 \times 75 = 11250$$

האפשרויות שנשארו עבור  $\heartsuit$ : 3, 4, 6. בודקים אותן אחת אחת ורואים שרק האפשרות  $\heartsuit = 4$  עובדת:

$$2 \times 45 \times 45 = 4050$$

הערה: מבחינה מתמטית, הדוגמה שמצאנו מהווה פתרון מלא לבעיה זאת. אבל בעצם, קיבלנו קצת יותר: שחזרנו את הספרות בתרגיל הזה בוודאות (כלומר, זאת האפשרות היחידה שיכולה להיות).