

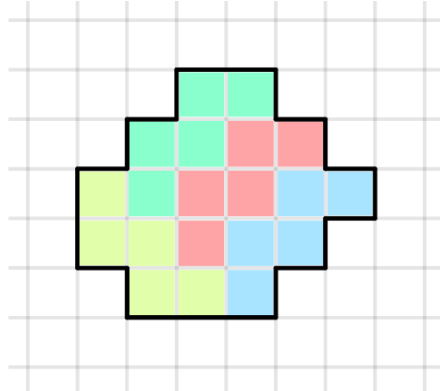


# אולימפיאדת מתמטיקה שדרות תשפ"ה – כיתות ה'ו'

בעיה 1.

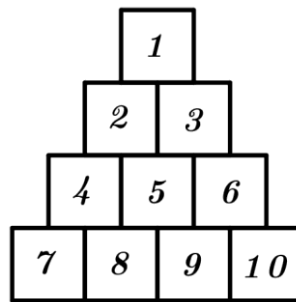
ציירו איך לחתוך את הצורה ארבעה חלקים *חופפים* (כלומר, זהים גם בצורה וגם בגודל).

תשובה.



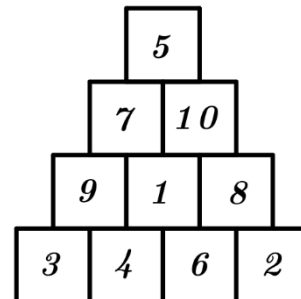
בעיה 2.

בתמונה מגדל קוביות:



ציירו איך לבנות מהקוביות מגדל זהה, כך שכל קובייה בתוכו תיגע רק בקוביות שהיא לא נגעה קודם.

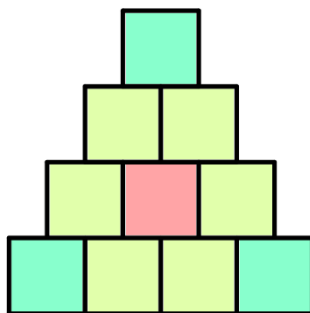
תשובה.



הערה: זאת לא האפשרות היחידה.  
יש בסך הכל 18 אפשרויות,  
הדרך לפתרון מאפשרת להגיע לכולם  
באופן שיטתי.

דרך הפתרון.

נשים לב שקובייה שעומדת במרכז, נוגעת ב-6 קוביות, קובייה שעומדת בפינה – ב-2 קוביות, וכל קובייה אחרת נוגעת ב-4 קוביות. מכאן, קובייה 1 חייבת להגיע לפינה. למשל, אפשר לשים אותה בפינה העליונה. בנוסף, קובייה שתהיה במרכז בסידור החדש, חייבת להגיע מהפינה. למשל, זאת יכולה להיות קובייה 5.



אם נשים את 1 בפינה העליונה ואת 5 במרכז, הקוביות היחידות שיכולות להגיע למקומות של הקוביות 2 ו-3 אלה רק הקוביות 7 ו-10, כי כל הקוביות האחרות כבר נגעו בקובייה 5. נשים לב גם שעכשיו ל-2 ו-3 מתאימים רק המקומות בפינות למטה.

סידור הקוביות הנותרות נקבע באמצעות ניסוי וטעיה.

הערה: מבחינה מתמטית, דוגמה לבד מהווה פתרון מלא לבעיה זאת, כי התבקשנו רק להדגים איך אפשר לעשות את זה.



## אולימפיאדת מתמטיקה שדרות תשפ"ה – כיתות ה'-ו'

### בעיה 3.

המציאו מספר טבעי כך שמתוך ארבעה המשפטים הבאים שניים יהיו נכונים ושניים יהיו לא נכונים:

- אם נכפול את המספר ב-2, נקבל יותר מ-70.
- המספר קטן מ-100.
- ארבע פעמים המספר שלנו גדול מ-25.
- המספר גדול מ-5.

הערה: מספר טבעי זה מספר חיובי שלם.

### תשובה 6.

#### פתרון.

נחליף את תנאים המקוריים במשפטים ששקולים להם ויותר נוחים לשימוש:

1. המספר גדול מ-70.
2. המספר קטן מ-100.
3. המספר גדול מ-6.
4. המספר גדול מ-5.

אילו (1) היה נכון, גם (3) וגם (4) היו נכונים – ואז היו לפחות שלושה משפטים נכונים. מכאן, בגלל שיש רק שני משפטים נכונים, (1) לא יכול להיות נכון.

בגלל ש-(1) לא נכון והמספר לא גדול מ-70, הוא בוודאות קטן מ-100. לכן (2) נכון בוודאות.

כדי שבסך הכל יהיו שני משפטים נכונים ושניים לא נכונים, מבין (3) ו-(4) אחד חייב להיות נכון ואחד לא נכון. בגלל ש-(4) נובע מ-(3), המשפט (3) חייב להיות נכון, ו-(4) חייב להיות לא נכון (אילו (4) היה נכון, גם (3) היה נכון, וזה לא מתאים).

1. המספר גדול מ-70 ✗
2. המספר קטן מ-100 ✓
3. המספר גדול מ-6 ✗
4. המספר גדול מ-5 ✓

המספר הטבעי היחיד שעונה לארבעה הדרישות האלה, זה 6.

הערה: הדוגמה לבד מהווה פתרון מלא לבעיה זאת. אבל בעצם, הדרך בה מצאנו את הדוגמה, מאפשרת להבין קצת יותר: הוכחנו שיש בדיוק מספר אחד כזה. כלומר, זה לא רק שהמספר יכול להיות, הוא גם חייב להיות 6.



## אולימפיאדת מתמטיקה שדרות תשפ"ה – ביתות ה'ו'

### בעיה 4.

רשמו במקום הסמלים ספרות שונות מ-0, כך שיתקבל שוויון נכון. סמלים שונים מסמנים ספרות שונות, וסמלים זהים מסמנים ספרות זהות.

$$2 \times \text{😊} \heartsuit \times \text{😊} \heartsuit = \text{😊} 0 \heartsuit 0$$

### תשובה.

$$2 \times 45 \times 45 = 4050$$

### דרך הפתרון.

נשים לב שהמספר  $\text{😊} 0 \heartsuit 0$  הוא כפולה של 5, כי הוא מסתיים ב-0. נתבונן במספר  $\text{😊} \heartsuit$ . בגלל ש- $\text{😊} \heartsuit \times \text{😊} \heartsuit \times 2$  זאת כפולה של 5, המספר  $\text{😊} \heartsuit$  חייב להיות כפולה של 5 בעצמו. מכאן,  $\heartsuit$  יכול להיות רק 5 או 0, אבל בגלל שנתון שזה לא 0,  $\heartsuit$  חייב להיות 5.

$$2 \times \text{😊} 5 \times \text{😊} 5 = \text{😊} 0 5 0$$

עכשיו נחפש כמה  $\text{😊}$  יכול להיות שווה.

$$2 \times 15 \times 15 = 450$$

$$2 \times 75 \times 75 = 11250$$

האפשרויות שנשארו עבור  $\text{😊}$ : 3, 4, 6. בודקים אותן אחת אחת ורואים שרק האפשרות  $\text{😊} = 4$  עובדת:

$$2 \times 45 \times 45 = 4050$$

הערה: מבחינה מתמטית, הדוגמה שמצאנו מהווה פתרון מלא לבעיה זאת. אבל בעצם, קיבלנו קצת יותר: שחזרנו את הספרות בתרגיל הזה בוודאות (כלומר, זאת האפשרות היחידה שיכולה להיות).

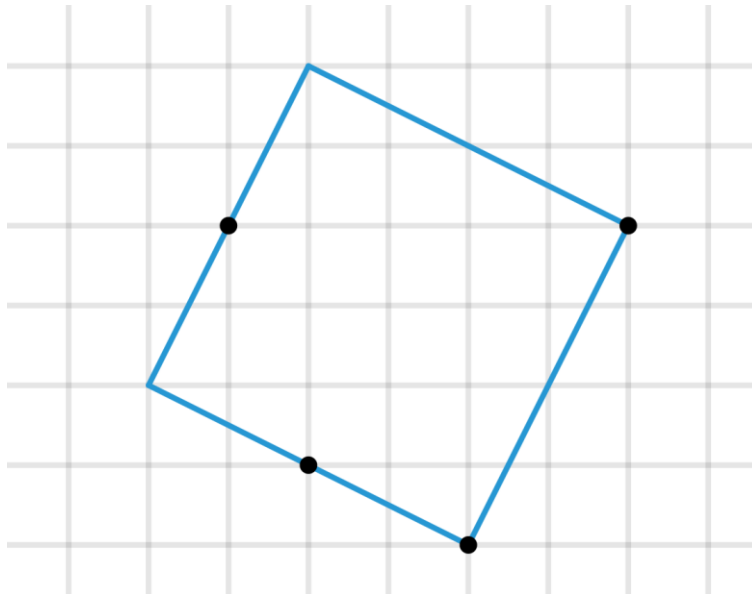


# אולימפיאדת מתמטיקה שדרות תשפ"ה – כיתות ה'ו'

בעיה 5.

ציירו ריבוע שעובר בשלושת הנקודות המסומנות.

תשובה.



בעיה 6.

שלושה שודדי ים: ג'ק, ג'ון וג'ים, מצאו תיבה בה 24 מטבעות זהב:

1 לירה, 2 לירות, 3 לירות, 4 לירות, ..., 24 לירות.

השודדים רוצים לחלק ביניהם את המטבעות כך שהסכום שג'ק יקבל יהיה גדול פי שניים מהסכום שיקבל ג'ון וקטן פי שניים מהסכום שיקבל ג'ים. האם יצליחו השודדים לעשות את זה? נמקו את תשובתכם.

תשובה. לא

תשובה.

בהנחה שהשודדים הצליחו לחלק את הזהב בצורה שהם רצו, ג'ק מקבל פי 2 זהב מג'ון, וג'ים קיבל פי 4 זהב מג'ון. כלומר, סך כל הזהב זה 7 פעמים החלק של ג'ון:

תרשים

מצד שני, הכמות הכוללת של הזהב היא

$$1 + 2 + \dots + 24 = \overbrace{(1 + 24) + (2 + 23) + (3 + 22) + \dots}^{12 \text{ זוגות}} = 25 \cdot 12 = 300$$

וזה לא מתחלק ב-7.