



## האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ד'-ה' שלב הגמר, שנת תשפ"ד - פתרונות

1. על הלוח רשומים המספרים מ-1 עד 100 בסדר עולה, כך:

$$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ \dots \ 99 \ 100$$

איילה רושמת סימני חיבור + או כפל  $\times$  בין המספרים (אפשר חלק כפל וחלק חיבור). אחרי זה ברווז מוסיף סוגריים איפה שהוא רוצה, כך שעדיין נשאר ביטוי חוקי.

איילה רוצה שתוצאת הביטוי תהיה אי-זוגית. האם היא יכולה לדאוג שלא משנה מה ברווז יעשה, התוצאה בכל מקרה תהיה אי-זוגית? נמקו את תשובתכם.

תשובה. כן, איילה יכולה לדאוג שהתוצאה תמיד תהיה חיובית.

פתרון.

איילה יכולה לעשות כך:

$$1 \times 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 99 + 100$$

ועכשיו לא משנה איך ברווז ישים את הסוגריים, המספר 1 יהיה מוכפל במשהו ולא ישפיע על התוצאה. לכן התוצאה תהיה שווה ל-

$$2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 99 + 100$$

לא משנה איך נשים את הסוגריים. בסכום הזה יש 49 מספרים אי-זוגיים, לכן התוצאה היא אי-זוגית.

2. בשורה ראשונה של אולם יש 50 כסאות. אמי, בני וגבי רוצים להתיישב בשורה הראשונה, כך שאמי תהיה משמאל, גבי – מימין, ובני – בדיוק באמצע ביניהם (כלומר, בין אמי לבני אותו מספר כיסאות כמו בין בני לגבי, כולל אפשרות של 0 כיסאות).

בכמה דרכים שונות הם יכולים לעשות זאת? נמקו את תשובתכם.

תשובה: 600

פתרון:

אם בני יושב בכיסה  $k$  אז לאמי יש  $(k - 1)$  מקומות משמאלו, ולגבי  $(50 - k)$  מקומות מימינו. בגלל שהמרחקים שווים, אם  $k - 1 \leq 50 - k$  אז יש  $(k - 1)$  אפשרויות ואם  $50 - k \geq k - 1$  יש  $(50 - k)$  אפשרויות להתיישב. נסכום על כל ה- $k$ ים ונקבל:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + 24 + 24 + 23 + \dots + 2 + 1 &= \\ = (1 + 24) + (2 + 23) + \dots + (24 + 1) &= 25 \cdot 24 = 600 \end{aligned}$$

3. לגמל יש מספר מקלות, לא בהכרח שוויו אורך. גמל יכול להרכיב מכל המקלות מחומש משוכלל, וגם יכול להרכיב מכל המקלות משולש שווה צלעות, וגם יכול להרכיב מכל המקלות מלבן. ציירו והסבירו כיצד זה אפשרי, כאשר יש לו:

א. 10 מקלות                      ב. 9 מקלות                      ג. 8 מקלות

פתרון:

נראה פתרון לסעיף ג, ואז אפשר לשבור את אחת המקלות כדי לקבל פתרון לסעיפים קודמים. נתחיל ממקל באורך 30 ונחלק אותו בצורה שווה ל-5 מקלות באורכים שווים בשביל לקבל מחומש משוכלל, ל-3 מקלות באורכים שווים כדי לקבל משולש משוכלל, ול-2 מקלות באורכים שווים שמחולכים בצורות זהות שמהן נרכיב מלבן:





## האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ד'-ה' שלב הגמר, שנת תשפ"ד - פתרונות



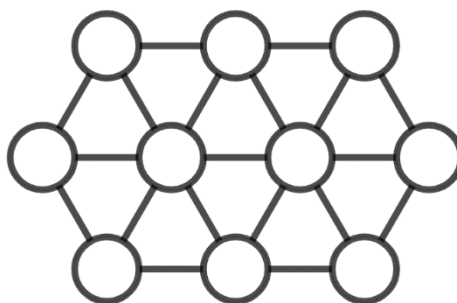
בציור כל משבצת היא באורך 2, אז המקלות הן באורכים 6,4,2,3,3,2,4,6. כדי להרכיב מחומש משוכלל נקבץ כך: 6, 4 + 2, 3 + 3, 4 + 2, 6. כדי להרכיב משולש משוכלל נקבץ את המקלות כך: 6 + 4, 2 + 3 + 3 + 2, 4 + 6. וכדי להרכיב מלבן: 3, 6 + 4 + 2, 3, 6 + 4 + 2, 6 + 4 + 2. הערה: זו לא הדרך היחידה לפתור את השאלה.

4. בישראל יש מטבעות של 1, 2, 5 ו-10 שקלים. נעמי, תמר ויונתן הרכיבו ממטבעות מסוגים אלו שלושה סכומים שווים של כסף בצורות שונות, תוך שימוש באותו מספר של מטבעות. מצאו סכום קטן ככל האפשר העונה על תנאי השאלה, ורשמו כיצד נעמי, תמר ויונתן הרכיבו אותו. אין צורך להוכיח שזה הסכום הקטן ביותר.

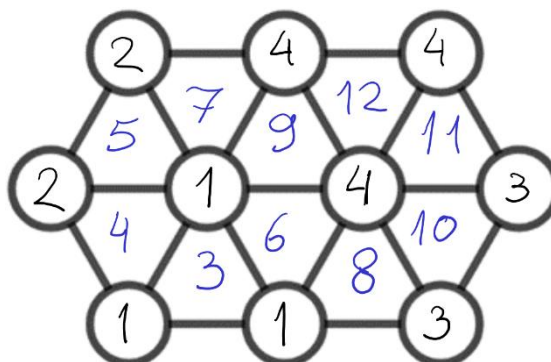
תשובה: 15

הסבר:  $15 = 10 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 + 5 + 2 + 1 + 1 + 1 = 5 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$

5. דורבן רשם בכל אחד מהעיגולים ספרה 1, 2, 3 או 4. אחרי זה הוא רשם בכל משולש קטן מספרים בשלושת הקודקודים שלו. בכל המשולשים הקטנים הסכומים יצאו שונים זה מזה. הראו כיצד זה אפשרי.



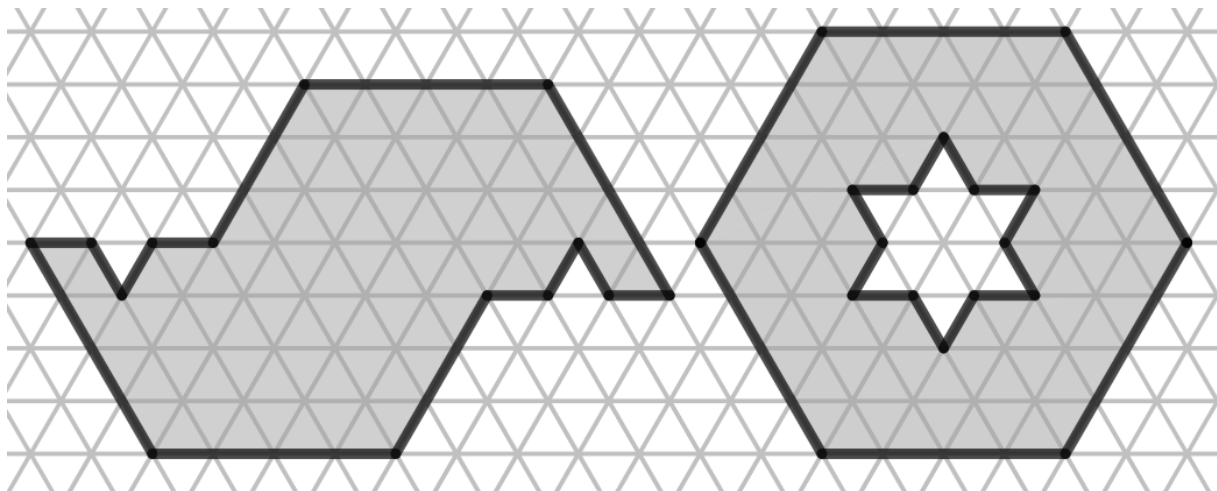
פתרון:



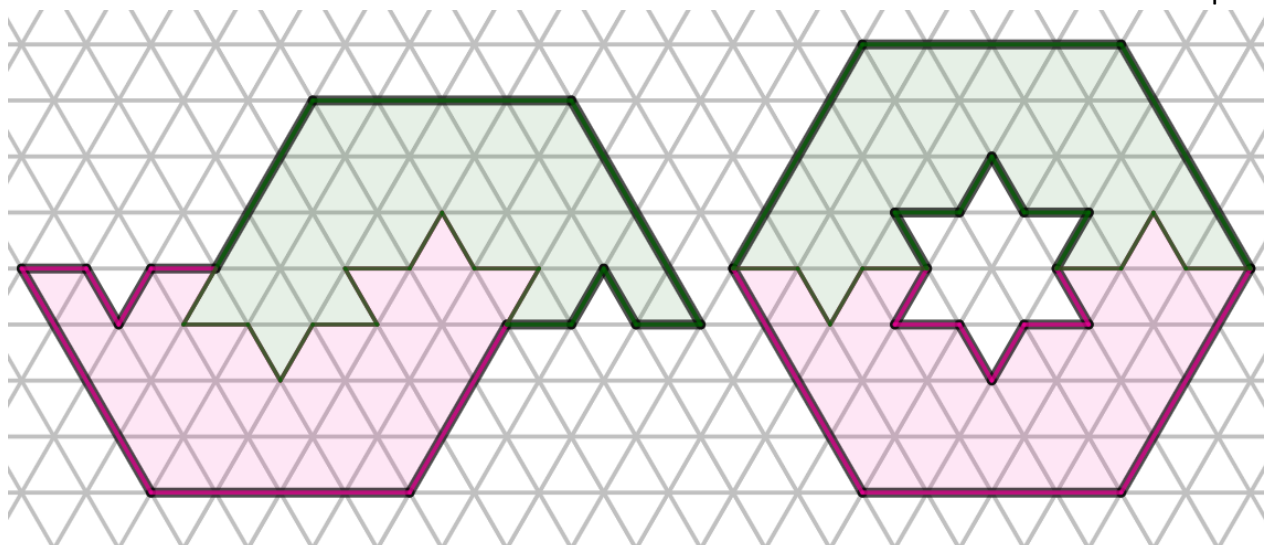


האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ד'-ה'  
שלב הגמר, שנת תשפ"ד - פתרונות

6. ציירו כיצד לחתוך את הצורה השמאלית לשני חלקים חופפים (זהים בצורה ובגודל) ואז להרכיב מהחלקים את הצורה הימנית.



פתרון:



בהצלחה!