



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ו'-ז'

שלב הגמר, שנת תשפ"ד

משך התחרות – 3 שעות. אסור להשתמש במחשבון או בכל מה שמכיל מחשבון. יש **לכבות** את כל הטלפונים. יש לכתוב **בעט**, רק על הדפים הריקים שיחולקו על ידי המשגיחים, בצד אחד בלבד. ניתן לפנות למשגיחים עם כל שאלה. קבלת עזרה מכל אחד אחר **אסורה בהחלט**.

1. על הלוח רשומים המספרים מ-1 עד 100 בסדר עולה, כך:

$$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ \dots \ 99 \ 100$$

איילה רושמת סימני חיבור + או כפל \times בין המספרים (אפשר חלק כפל וחלק חיבור). אחרי זה ברווז מוסיף סוגריים איפה שהוא רוצה, כך שעדיין נשאר ביטוי חוקי.

איילה רוצה שתוצאת הביטוי תהיה אי-זוגית. האם היא יכולה לדאוג שלא משנה מה ברווז יעשה, התוצאה בכל מקרה תהיה אי-זוגית? נמקו את תשובתכם.

פתרון:

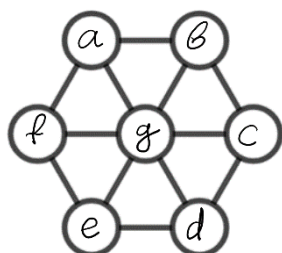
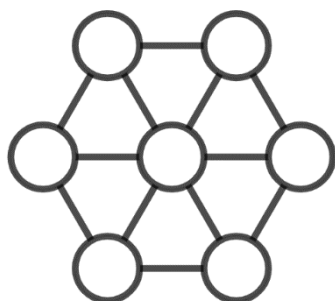
איילה יכולה לעשות כך:

$$1 \times 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 99 + 100$$

ועכשיו לא משנה איך ברווז ישים את הסוגריים, המספר 1 יהיה מוכפל במשהו ולא ישפיע על התוצאה. לכן התוצאה תהיה שווה ל-

$$2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 99 + 100$$

לא משנה איך נשים את הסוגריים. בסכום הזה יש 49 מספרים אי-זוגיים, לכן התוצאה היא אי-זוגית.



2. היפו רשם בכל אחד מהעיגולים מספר טבעי (שלם וגדול מ-0). בכל משולש קטן הוא רשם סכום של המספרים בשלושת קודקודיו. האם יכול להיות שיצאו לו 6 מספרים טבעיים עוקבים? נמקו את תשובתכם.

תשובה: לא יכול להיות

פתרון: ניתן שמות למספרים שעומדים בעיגולים:

אם נסכום את כל 6 הסכומים שבמשולשים, נקבל:

$$(a + b + g) + (b + c + g) + (c + d + g) + (d + e + g) + (e + f + g) + (f + a + g) = 6g + 2 \cdot (a + b + c + d + e + f)$$

זוה מספר זוגי.

מצד שני בכל 6 מספרים עוקבים יש 3 זוגיים ו-3 אי-זוגיים, לכן סכום של 6 מספרים עוקבים הוא תמיד אי-זוגי.

ולכן הסכומים במשולשים לא יכולים להיות 6 מספרים עוקבים.



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ו'ז'

שלב הגמר, שנת תשפ"ד

משך התחרות – 3 שעות. אסור להשתמש במחשבון או בכל מה שמכיל מחשבון. יש לכתוב את כל התשובות. יש לכתוב בעט, רק על הדפים הריקים שיחולקו על ידי המשגיחים, בצד אחד בלבד. ניתן לפנות למשגיחים עם כל שאלה. קבלת עזרה מכל אחד אחר אסורה בהחלט.

5. מצאו מספר שמופיע לפחות 16 פעמים בלוח הכפל של מספרים מ-1 עד 100. הסבירו איך יודעים שהוא מופיע לפחות 16 פעמים.

פתרון:

אפשר לקחת ולנסות מספרים עם הרבה גורמים ראשוניים קטנים, ולמשל המספר 180 עובד. נבדוק

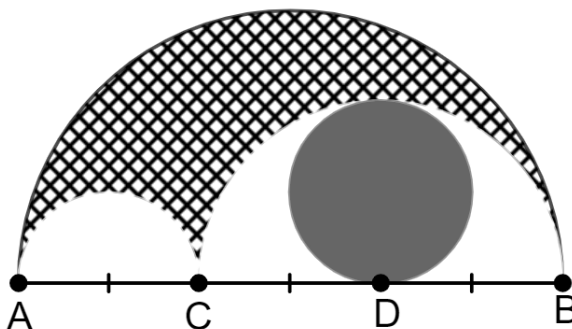
זאת:

$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ אז כל המחלקים שלו הם מצורה $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ כאשר ל- a, b, c אפשרויות (0,1,2) ול- c שתי אפשרויות (0,1). לכן סה"כ יש $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ מחלקים למספר 180. לכל מחלק a אפשר להציג את 180 כ- $a \cdot \frac{180}{a}$ ולכל המחלקים חוץ מ-1 ו-180 גם a וגם $\frac{180}{a}$ הם מספרים בין 1 ל-100. לכן בלוח הכפל של מספרים מ-1 עד 100 המספר 180 מופיע בדיוק 16 פעמים.

הערה:

יש עוד מספרים שמופיעים 16 פעמים, ואפילו שני מספרים מופיעים 18 פעמים. הנה המספרים: מופיעים 16 פעמים: 180, 240, 420, 480, 504, 840, 1260, 1440 מופיעים 18 פעמים: 360, 720

6. נתון קטע אופקי AB , המחולק ל-3 חלקים שווים כך: $AC = CD = DB$. מעליו בונים חצי עיגול עם קוטר AB , חצי עיגול עם קוטר AC וחצי עיגול עם קוטר CB . בנוסף בונים עיגול שחוסם בחצי עיגול שקוטרו CB ומשיק לקטע CB בנקודה D . מצאו את היחס בין שטח העיגול (המסומן באפור) לשטח שבתוך חצי העיגול הגדול אבל מחוץ לחצאי בעיגולים הקטנים (המקווקו). נמקו את תשובתכם.



פתרון:

נסמן את AC ב- d . אז רדיוס של עיגול אפור וגם של החצי עיגול השמאלי, d הוא רדיוס של חצי עיגול הימני ו- $\frac{3d}{2}$ הוא רדיוס של חצי-עיגול הגדול. נחשב את יחס השטחים:

$$\frac{\frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{3d}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\pi \cdot d^2 - \frac{1}{2}\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2}{\pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4} - 1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{9-4-1}{1} = \frac{4}{2} = 2:1$$

כלומר היחס הוא 2:1, החלק המקווקו פי 2 יותר גדול מהעיגול האפור.

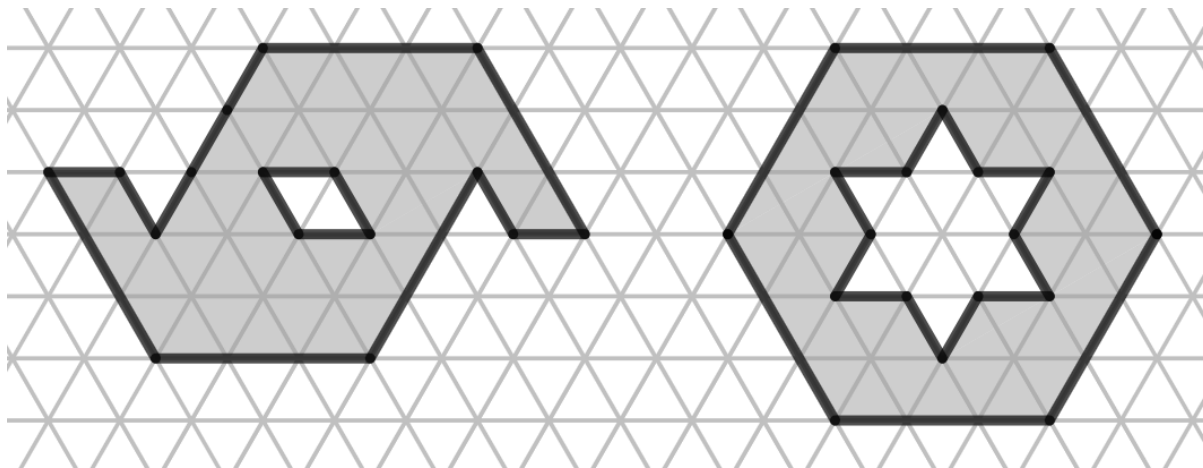


האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ו'-ז'

שלב הגמר, שנת תשפ"ד

משך התחרות – 3 שעות. אסור להשתמש במחשבון או בכל מה שמכיל מחשבון. יש **לכבות** את כל הטלפונים. יש לכתוב **בעט**, רק על הדפים הריקים שיחולקו על ידי המשגיחים, בצד אחד בלבד. ניתן לפנות למשגיחים עם כל שאלה. קבלת עזרה מכל אחד אחר **אסורה בהחלט**.

7. ציירו כיצד לחתוך את הצורה השמאלית לשני חלקים חופפים (זהים בצורה ובגודל) ואז להרכיב מהחלקים את הצורה הימנית.



פתרון:

