



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ח'-ט'

שלב הגמר, שנת תשפ"ד

משך התחרות – 3 שעות. אסור להשתמש במחשבון או בכל מה שמכיל מחשבון. יש לכתוב את כל הטלפונים. יש לכתוב בעט, רק על הדפים הריקים שיחולקו על ידי המשגיחים, בצד אחד בלבד. ניתן לפנות למשגיחים עם כל שאלה. קבלת עזרה מכל אחד אחר אסורה בהחלט.

והשטח האפור הוא $S_{\blacksquare} = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2$
כלומר מקבלים משוואה:

$$\frac{1}{2} \pi \cdot (15^2 - (15 - d)^2 - d^2) = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

$$2 \cdot (30d - 2d^2) = d^2$$

$$60d = 5d^2$$

$$d = 12$$

3. נתון דף משבצות בגודל 84×57 . באמצע של אחת המשבצות יושב צפרדע. על הדף מסומנים k קווים ישרים, כך שכל קו הוא אופקי או אנכי ועובר בקודקודי המשבצות. כל דקה הצפרדע בוחר אחד מהקווים המסומנים וקופץ למשבצת סימטרית ביחס לקו הזה. נתון כי הצפרדע עבר בכל משבצת הדף פעם אחת בדיוק. מצאו את ה- k הכי קטן עבורו זה יכול להתקיים.

תשובה: 4

פתרון:

ניתן לכל משבצת זוג קואורדינטות: (x, y) . כל קפיצה מחליפה את אחת הקואורדינטות, כך שאם הקו הוא אנכי ובין משבצות $a, a + 1$ אז הקפיצה היא $(x, y) \rightarrow (2a + 1 - x, y)$ ובחזרה. אם יש פחות מ-2 קווים אנכיים או פחות מ-2 קווים אופקיים, אז האחת הקואורדינטות נוכל להגיע רק לשני ערכים אפשריים ולא נוכל לעבור על כל המשבצות. לכן חייבים לפחות 4 קווים. עכשיו נראה ש-4 קווים זה מספיק. קודם כל אם הצפרדע יכול לעבור על כל האפשרויות של x ועל כל האפשרויות של y אז הוא יכול לעבור על כל המשבצות: אם הוא יכול לעבור את כל ה- x -ים בסדר הבא $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ואת כל ה- y -ים בסדר $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ אז הוא יכול לעבור את כל המשבצות כך: $(x_1, y_1), (x_2, y_1), \dots, (x_n, y_1), (x_n, y_2), \dots, (x_1, y_2), (x_1, y_3) \dots$ כלומר קודם שורה y_1 , ואז קופץ ל- y_2 , עובר את כל השורה, קופץ ל- y_3 וכו'. עכשיו נראה שלכל k צפרדע יכול לעבור בכל המשבצות של שורה באורך k באמצעות 2 קווים. נוכיח באינדוקציה. קודם עבור k -ים אי-זוגיים.

1	2	3
---	---	---

נתחיל מ-3 משבצות ו-2 הקווים בינן. צפרדע עובר אותם בסדר הבא: $1 \ 2 \ 3$. נוסף משבצת מימין ומשבצת משמאל. אפשר להגיע ממשבצת שמאלית החדשה למשבצת ימנית הישנה וממשבצת ימנית החדשה למשבצת שמאלית הישנה. כלומר לא משנה מה היה מסלול קודם, אם הוא התחיל ונגמר בקצוות השורה אז עכשיו הוא גם יתחיל ויסתיים בקצוות השורה, כלומר כך:

1	k-1	2	k
---	-----	---	---	---	---	---	---

ועבור k זוגי אפשר לקחת את הדוגמה של $k + 1$ שהוא אי-זוגי ולהוריד את המשבצת של $k + 1$. (היא בקצה השורה וגם בסוף המסלול של הצפרדע).



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ח'-ט'

שלב הגמר, שנת תשפ"ד

משך התחרות – 3 שעות. אסור להשתמש במחשבון או בכל מה שמכיל מחשבון. יש לכבות את כל הטלפונים. יש לכתוב בעט, רק על הדפים הריקים שיחולקו על ידי המשגיחים, בצד אחד בלבד. ניתן לפנות למשגיחים עם כל שאלה. קבלת עזרה מכל אחד אחר אסורה בהחלט.

4. מצאו את האורך של הסדרה החשבונית העולה הארוכה ביותר, בה כל המספרים מופיעים בלוח הכפל של מספרים מ-1 עד 100.

תשובה: 100

סדרה חשבונית באורך 100 קיימת: 1,2,3,4,...,100.

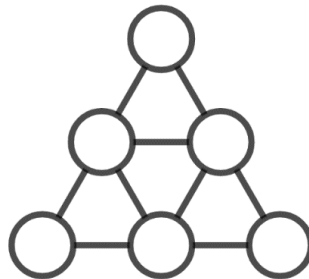
נניח בשלילה שקיימת סדרה באורך 101.

סדרה חשבונית כזו אפשר לכתוב כך: $a_n = a_0 + n \cdot d$ כאשר n הולך מ-0 ועד 100 כולל. (זה 101 מספרים).

אם $d \geq 100$ אז $a_{100} = a_0 + 100 \cdot d > 100 \cdot 100$ ולכן לא נמצא בלוח הכפל. לכן $d < 100$, ובפרט זר ל-101. בגלל ש-101 הוא מספר ראשוני, בסדרה חשבונית של 101 מספרים עם d זר ל-101 לא יכולים להיות שני מספרים עם אותה שארית בחלוקה ב-101 (כי $a_k - a_l = (k - l)d$ אבל גם $k - l$ וגם d קטנים מ-101), ולכן כל השאריות האפשריות נמצאות בסדרה, ובפרט אחד המספרים a_0, a_1, \dots, a_{100} מתחלק ב-101, ולכן לא נמצא בלוח הכפל.

הערה: גם אם היינו שואלים על לוח כפל של מספרים מ-1 ועד 97 התשובה עדיין הייתה 100.

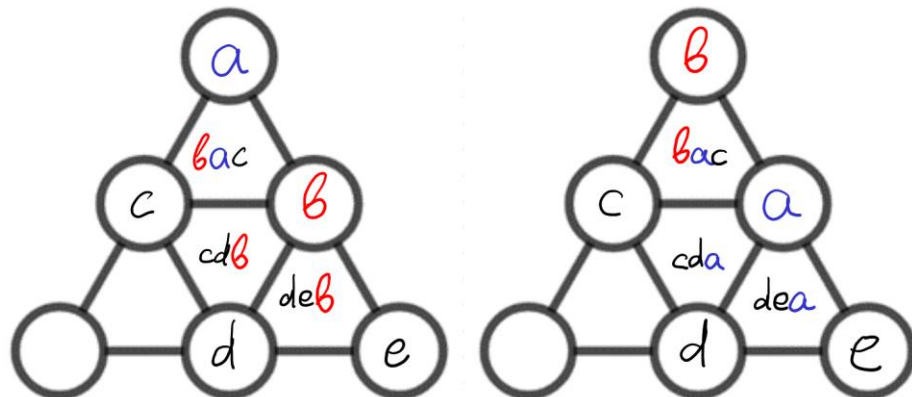
5. מספרים טבעיים מ-1 עד 6 רשומים בעיגולים בצירוף הבא, בכל עיגול מספר שונה. בכל אחד מ-4 המשולשים רשומים מספרים שבקודקודיו, ואז סוכמים את כל 4 המכפלות. מה הסכום הכי קטן והסכום הכי גדול שיכולים להתקבל כתוצאה מכך?



תשובה: 57. 278.

פתרון:

נסתכל על שני מספרים סמוכים, a ו- b , עם $a < b$. נשווה בין שני מצבים: אם a על הצלע ו- b בקודקוד הסמוך, או להיפך (נחליף רק את a, b). המשולש בו השתתפו שניהם לא השתנה, ובשני משולשים האחרים a הוחלף ב- b . לכן במצב בו b (המספר הגדול יותר) על הצלע הסכום גם יותר גדול.



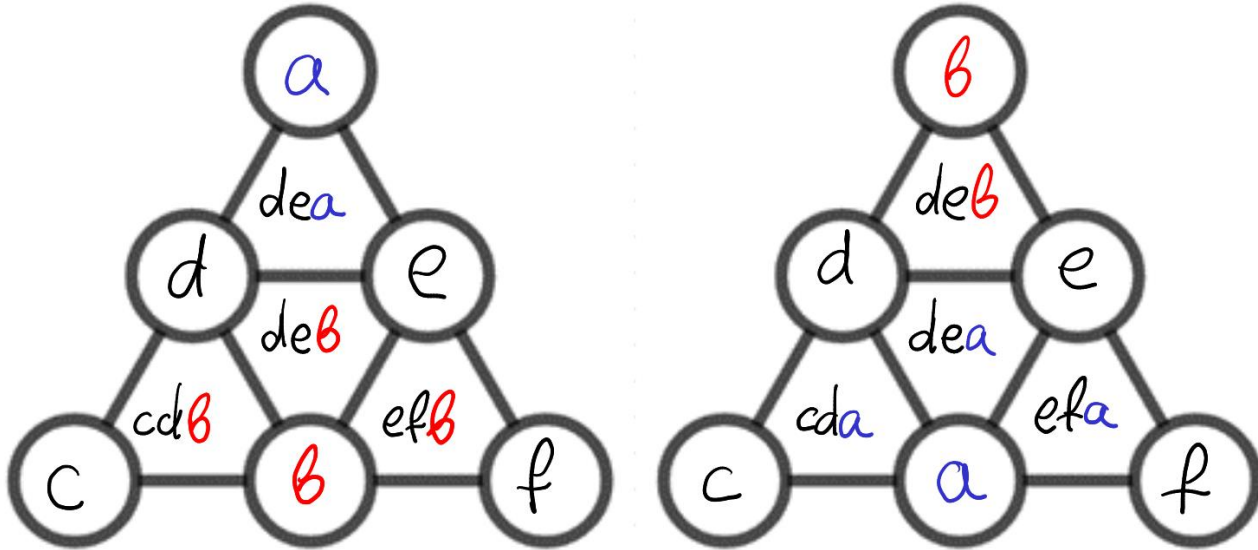


האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ח'-ט'

שלב הגמר, שנת תשפ"ד

משך התחרות – 3 שעות. אסור להשתמש במחשבון או בכל מה שמכיל מחשבון. יש לכתוב את כל הטלפונים. יש לכתוב בעט, רק על הדפים הריקים שיחולקו על ידי המשגיחים, בצד אחד בלבד. ניתן לפנות למשגיחים עם כל שאלה. קבלת עזרה מכל אחד אחר אסורה בהחלט.

עכשיו ננסה להחליף גם a, b שלא סמוכים, כאשר אחד מהם בקודקוד ושני בצלע שממול.



כמו שרואים גם כאן, שניים מהמשולשים מתחלפים, ובאחרים b מתחלף ב- a . לכן לכל $a < b$ במצב בו a על צלע הסכום יהיה יותר קטן.

לכן אם רוצים סכום הכי גדול – אפשר להעביר את כל המספרים 4,5,6 לאמצע על ידי החלפה עם המספרים 1,2,3 וזה רק יגדיל את הסכום. ואם רוצים להקטין את הסכום – את המספרים 1,2,3 אפשר להעביר לאמצע ואת 4,5,6 לקודקודים.

ננסה לקבל סכום מקסימלי. 4,5,6 הם באמצע, לכן במשולש האמצעי יהיה $4 \cdot 5 \cdot 6$ ובמשולשים הצדדיים יהיה $4 \cdot 5 \cdot x$, $4 \cdot 6 \cdot y$, $5 \cdot 6 \cdot z$. אם נחליף למשל בין x, y אז כדי שהסכום יהיה יותר גדול צריך להכפיל מספר קטן במספר קטן וגדול בגדול (אחרת אפשר להחליף בין x ל- y). לכן הסכום המקסימלי הוא

$$4 \cdot 5 \cdot 6 + 5 \cdot 6 \cdot 3 + 4 \cdot 6 \cdot 2 + 4 \cdot 5 \cdot 1 = 278$$

באותה צורה כדי לקבל סכום מינימלי 4,5,6 יהיו בקודקודים, והפעם נרצה להכפיל מספרים יותר קטנים במספרים יותר גדולים, כלומר את $1 \cdot 2$ ב-6, את $1 \cdot 3$ ב-5 ואת $2 \cdot 3$ ב-4 כך:

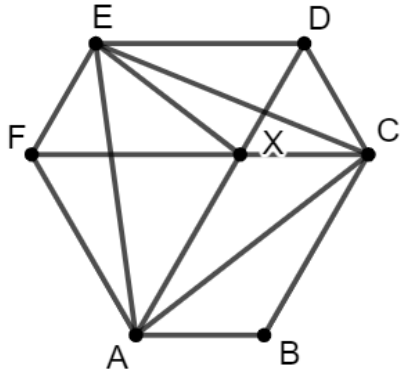
$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 6 + 1 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \cdot 4 = 57$$



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ח'-ט'

שלב הגמר, שנת תשפ"ד

משך התחרות – 3 שעות. אסור להשתמש במחשבון או בכל מה שמכיל מחשבון. יש לכתוב את כל הטלפונים. יש לכתוב בעט, רק על הדפים הריקים שיחולקו על ידי המשגיחים, בצד אחד בלבד. ניתן לפנות למשגיחים עם כל שאלה. קבלת עזרה מכל אחד אחר אסורה בהחלט.



6. נתון משושה $ABCDEF$ בו כל הזוויות הן 120° . נתון גם $AB = CD = EF$ וגם $BC = DE = FA$. האלכסונים AD, CF נפגשים בנקודה X . נסמן ב- $S(ACX), S(AEX), S(CEX)$ את השטחים של משולשים ACX, AEX, CEX . הוכיחו כי

$$(S(ACX))^2 = S(AEX) \cdot S(CEX)$$

פתרון:

קודם כל נשים לב ש- $FEDC, DCBA, CBAF, AFED$ טרפזים שווים שוקיים (למשל ב- $FEDC$ מתקיים $\angle FED = \angle EDC$ וגם $EF = DC$ לכן זה טרפז שווה שוקיים). לכן $FE \parallel AD \parallel BC$ וגם $ED \parallel FC \parallel AB$.

לכן $S(AEX) = S(AFX)$ – הבסיס AX משותף וגובה מ- E שווה לגובה מ- F . באותה צורה $S(CEX) = S(CDX)$. נשים לב גם כי בגלל $DC \parallel FA$ מדמיון משולשים מתקיים $\frac{FX}{XC} = \frac{AX}{XD}$. לכן גם

$$\frac{S(FXA)}{S(XCA)} = \frac{FX}{XC} = \frac{AX}{XD} = \frac{S(AXC)}{S(XDC)}$$

(יחס שטחים של משולשים עם אותו גובה שווה ליחס אורכי הבסיסים) כולומר $(S(ACX))^2 = S(AEX) \cdot S(CEX)$.

7. א. האם לכל מספר טבעי $n \geq 2$ קיימת סדרה חשבונית עולה באורך n של מספרים טבעיים, בה סכומי ספרות של המספרים מהווים סדרה יורדת?
 ב. האם לכל מספר טבעי $n \geq 2$ קיימת סדרה חשבונית עולה באורך n של מספרים טבעיים, בה סכומי ספרות של המספרים מהווים סדרה חשבונית יורדת?

תשובה: כן וכן.

פתרון:

נפתור את השאלה עבור $n = 10^k$ (לכל k טבעי).

$$a_0 = \sum_{i=0}^{10^k-1} (10^{k+2})^i \cdot (9 \cdot 10^k + i)$$

$$d = \sum_{i=0}^{10^k-1} (10^{k+2})^i$$

והסדרה $a_m = a_0 + d \cdot m$



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ח'-ט'

שלב הגמר, שנת תשפ"ד

משך התחרות – 3 שעות. אסור להשתמש במחשבון או בכל מה שמכיל מחשבון. יש **לכבות** את כל הטלפונים. יש לכתוב **בעט**, רק על הדפים הריקים שיחולקו על ידי המשגיחים, בצד אחד בלבד. ניתן לפנות למשגיחים עם כל שאלה. קבלת עזרה מכל אחד אחר **אסורה בהחלט**.

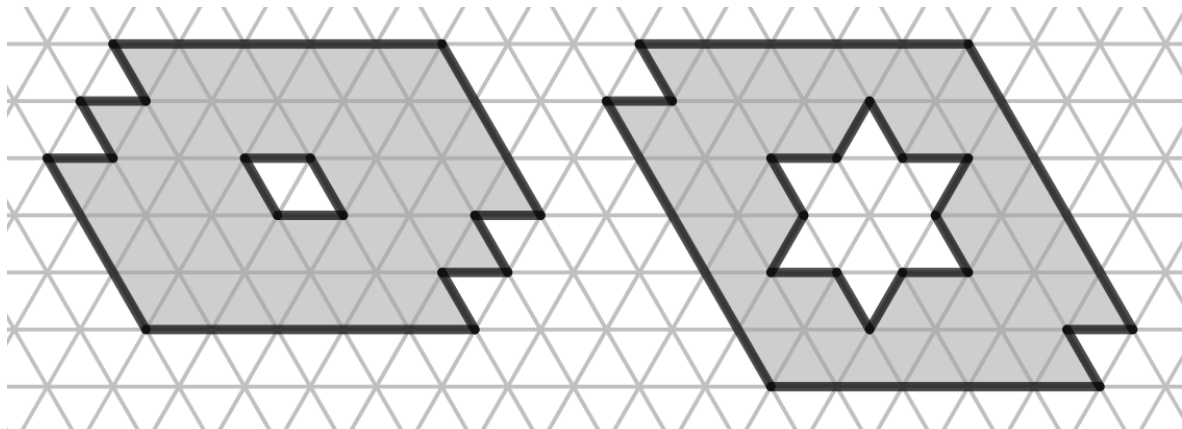
לדוגמה עבור $k = 1$ זו תהיה הסדרה:

99098087096095094093092091090
100099088097096095094093092091
101100089098097096095094093092
102101090099098097096095094093
103102091100099098097096095094
104103092101100099098097096095
105104093102101100099098097096
106105094103102101100099098097
107106095104103102101100099098
108107096105104103102101100099

עכשיו נסביר למה זה עובד לכל k

המספר a_0 מורכב מבלוקים שנראים כך: מספר בין 0 ל- $10^k - 1$, משמאלו ספרה 9 ומשמאלה 0. כל המספרים מ-0 עד $10^k - 1$ כולל מופיעים פעם אחת. באיברים הבאים של הסדרה החשבונית חלק מה-09-ים הוחלפו ב-10-ים. כשמוסיפים אחד לכל אחד מהבלוקים – קבוצת המספרים האלה לא משתנה, ורק המספר $10^k - 1$ מעביר את ה-1 הלאה, ואז ה-09 שמשמאל למספר הופך ל-10. סה"כ סכום הספרות קטן ב-8 כל פעם.

8. חתכו את הצורה השמאלית ל-2 חלקים חופפים והראו כיצד אפשר להרכיב מהם את הצורה הימנית.





האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ח'-ט'

שלב הגמר, שנת תשפ"ד

משך התחרות – 3 שעות. אסור להשתמש במחשבון או בכל מה שמכיל מחשבון. יש **לכבות** את כל הטלפונים. יש לכתוב **בעט**, רק על הדפים הריקים שיחולקו על ידי המשגיחים, בצד אחד בלבד. ניתן לפנות למשגיחים עם כל שאלה. קבלת עזרה מכל אחד אחר **אסורה בהחלט**.

פתרון:

