

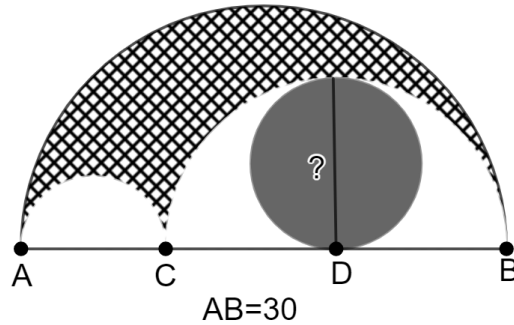


האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ח'-ט'

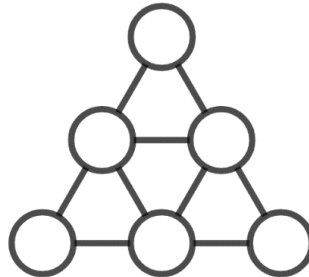
שלב הגמר, שנת תשפ"ד

משך התחרות – 3 שעות. אסור להשתמש במחשבון או בכל מה שמכיל מחשבון. יש **לכבות** את כל הטלפונים. יש לכתוב **בעט**, רק על הדפים הריקים שיחולקו על ידי המשגיחים, בצד אחד בלבד. ניתן לפנות למשגיחים עם כל שאלה. קבלת עזרה מכל אחד אחר **אסורה בהחלט**.

1. לאיילה יש מחברת ריקה ולוח. בהתחלה על הלוח רשום מספר 1 מאה פעמים. בכל שלב איילה בוחרת שני מספרים a, b שרשומים על הלוח, מוחקת אותם, ואז
 - רושמת על הלוח את סכומם $a + b$,
 - ורושמת במחברת את מכפלתם $a \cdot b$.
 בסוף על הלוח נשאר רק מספר אחד. מהן כל האפשרויות לסכום כל המספרים הרשומים במחברת?
2. נתון קטע אופקי AB שאורכו 30, ועליו נקודה C . מעליו בונים חצי עיגול עם קוטר AB , חצי עיגול עם קוטר AC וחצי עיגול עם קוטר CB . בנוסף בונים עיגול שחסום בחצי עיגול שקוטרו CB ומשיק לאמצע הקטע CB . נתון כי שטח העיגול (המסומן באפור) שווה לשטח שבתוך חצי העיגול הגדול אבל מחוץ לחצאי בעיגולים הקטנים (המסומן במקווקו). מצאו את הקוטר של העיגול.



3. נתון דף משבצות בגודל 84×57 . באמצע של אחת המשבצות יושב צפרדע. על הדף מסומנים k קווים ישרים, כך שכל קו הוא אופקי או אנכי ועובר בקודקודי המשבצות. כל דקה הצפרדע בוחר אחד מהקווים המסומנים וקופץ למשבצת סימטרית ביחס לקו הזה. נתון כי הצפרדע עבר בכל משבצת הדף פעם אחת בדיוק. מצאו את ה- k הכי קטן עבורו זה יכול להתקיים.
4. מצאו את האורך של הסדרה החשבונית העולה הארוכה ביותר, בה כל המספרים מופיעים בלוח הכפל של מספרים מ-1 עד 100.
5. מספרים טבעיים מ-1 עד 6 רשומים בעיגולים בציור הבא, בכל עיגול מספר שונה. בכל אחד מ-4 המשולשים רשומים מספרים שבקודקודיו, ואז סוכמים את כל 4 המכפלות. מה הסכום הכי קטן והסכום הכי גדול שיכולים להתקבל כתוצאה מכך?



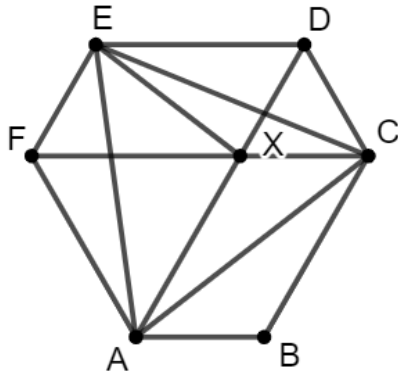
המשך בצד השני



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ח'-ט'

שלב הגמר, שנת תשפ"ד

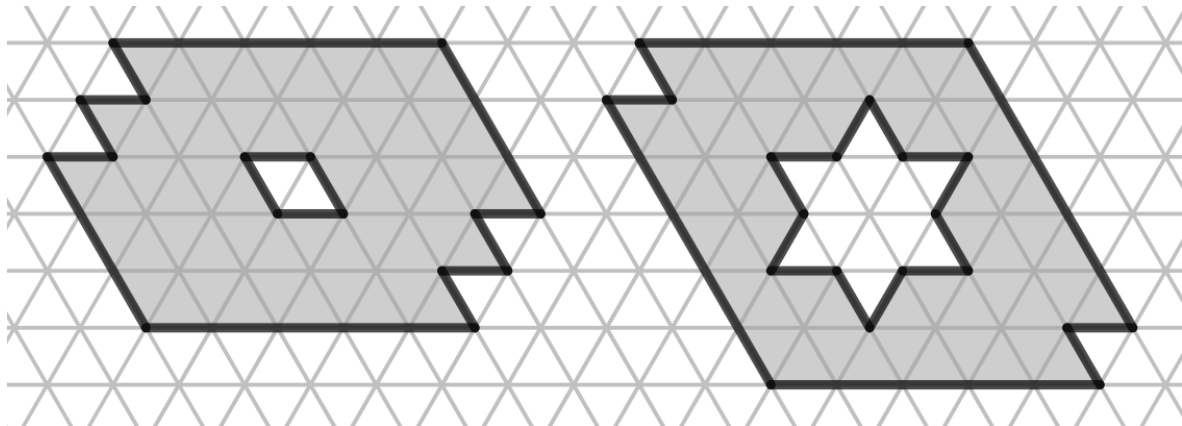
משך התחרות – 3 שעות. אסור להשתמש במחשבון או בכל מה שמכיל מחשבון. יש לכבות את כל הטלפונים. יש לכתוב בעט, רק על הדפים הריקים שיחולקו על ידי המשגיחים, בצד אחד בלבד. ניתן לפנות למשגיחים עם כל שאלה. קבלת עזרה מכל אחד אחר אסורה בהחלט.



6. נתון משושה $ABCDEF$ בו כל הזוויות הן 120° . נתון גם $AB = CD = EF$ וגם $BC = DE = FA$. האלכסונים AD, CF נפגשים בנקודה X . נסמן ב- $S(ACX), S(AEX), S(CEX)$ את השטחים של משולשים ACX, AEX, CEX . הוכיחו כי
- $$(S(ACX))^2 = S(AEX) \cdot S(CEX)$$

7. א. האם לכל מספר טבעי $n \geq 2$ קיימת סדרה חשבונית עולה באורך n של מספרים טבעיים, בה סכומי ספרות של המספרים מהווים סדרה יורדת?
 ב. האם לכל מספר טבעי $n \geq 2$ קיימת סדרה חשבונית עולה באורך n של מספרים טבעיים, בה סכומי ספרות של המספרים מהווים סדרה חשבונית יורדת?

8. חתכו את הצורה השמאלית ל-2 חלקים חופפים והראו כיצד אפשר להרכיב מהם את הצורה הימנית.



בהצלחה!