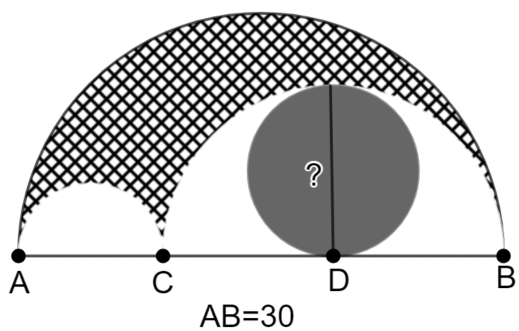
Всеизраильская олимпиада по математике для восьмых-девятых классов

Финал, 5784 год

Продолжительность соревнования – 3 часа. Запрещено пользоваться калькуляторами и всем, что содержит калькуляторы.
Все телефоны должны быть **выключены**. Решения надо писать **ручкой**, на чистых листах, которые будут розданы, и только с одной стороны.
Разрешено обращаться к проводящим олимпиаду с любыми вопросами. Обращение за помощью к кому-либо другому **строго запрещено**

1. У Лани есть пустая тетрадка и доска. В начале на доске записано число 1 сто раз. На каждом шаге Лань выбирает два записанных на доске числа, стирает их и
пишет на доску сумму $a + b$,
выписывает в тетрадку произведение $a \cdot b$.
В конце на доске остаётся только одно число. Чему может равняться сумма чисел, записанных в тетрадке?

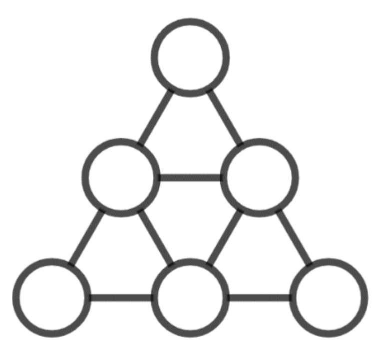
2. Дан горизонтальный отрезок AB длины 30, на нём отмечена точка C. На нём строят полукруг с диаметром AB, полукруг с диаметром AC и полукруг с диаметром CB. Кроме того, строят круг, который вписан в полукруг с диаметром CB и касается отрезка CB в его середине. Дано, что площадь круга (на рисунке серая) равна площади фигуры между большим полукругом и маленькими полукругами (на рисунке заштрихована). Найдите диаметр круга.



3. Дан клетчатый листик 57×84. В центре одной из клеточек сидит лягушка. На листике проведены k прямых, каждая из которых горизонтальна или вертикальна и проходит через вершины клеточек. Каждую минуту лягушка выбирает одну из проведённых прямых и перепрыгивает в симметричную относительно этой прямой клеточку. Известно, что лягушка побывала во всех клеточках ровно по разу. Для какого наименьшего k это возможно?

4. Найдите арифметическую прогрессию наибольшей длины, все члены которой встречаются в таблице умножения чисел от 1 до 100.

5. Натуральные числа от 1 до 6 записаны в кружочках, изображённых на картинке, – в каждом кружочке другое число. В каждом из 4 треугольников записали произведение чисел в его вершинах, а потом сложили все 4 произведения. Чему равны наименьший и наибольший возможный результаты?

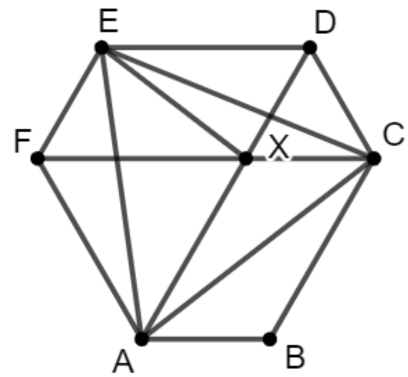


Продолжение на обороте

Всеизраильская олимпиада по математике
для восьмых-девятых классов
Финал, 5784 год

Продолжительность соревнования – 3 часа. Запрещено пользоваться калькуляторами и всем, что содержит калькуляторы.
Все телефоны должны быть **выключены**. Решения надо писать **ручкой**, на чистых листах, которые будут розданы, и только с одной стороны.
Разрешено обращаться к проводящим олимпиаду с любыми вопросами. Обращение за помощью к кому-либо другому **строго запрещено**

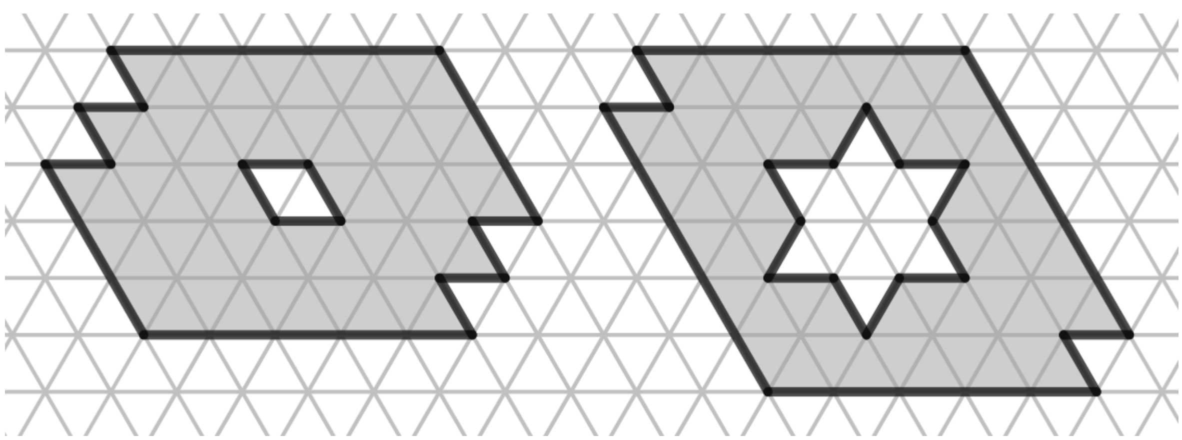
6. Дан шестиугольник $ABCDEF$ со всеми углами, равными $120°$. Известно также, что $BC = DE = FA$, а также $AB = CD = EF$. Диагонали AD, CF пересекаются в точке X. Обозначим через $S(ACX)$, $S(AEX)$, $S(CEX)$ площади треугольников ACX, AEX, CEX. Докажите, что $\left(S(ACX)\right)^2 = S(AEX) \cdot S(CEX)$.



7. а) Правда ли, что для каждого натурального $n \geq 2$ существует возрастающая арифметическая прогрессия длины n из натуральных чисел, в которой суммы цифр членов образуют убывающую последовательность?

   б) Правда ли, что для каждого натурального $n \geq 2$ существует возрастающая арифметическая прогрессия длины n из натуральных чисел, в которой суммы цифр членов образуют убывающую арифметическую прогрессию?

8. Разрежьте фигурку, изображённую слева, на две равные части и сложите из них фигурку, изображённую справа.



בהצלחה!

Задания олимпиады, решения и дополнительная информация будут опубликованы после 2.06.24 на сайте олимпиады. До тех пор задачи нельзя распространять
www.israelmath.com/olymp