



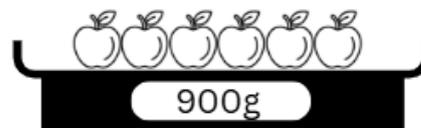
## האולימפיאדה הארצית במתמטיקה

### כיתות ג'

#### שלב הגמר, שנת תשפ"ו

משך התחרות – 3 שעות. אסור להשתמש במחשבון או בכל מה שמכיל מחשבון. יש לכבות את כל הטלפונים. יש לכתוב בעט, רק על הדפים הריקים שיחולקו על ידי המשגיחים, בצד אחד בלבד. ניתן לפנות למשגיחים עם כל שאלה. קבלת עזרה מכל אחד אחר **אסורה בהחלט**. שימו לב – בתחרות 6 שאלות. גם פתרונות חלקיים יכולים לתת חלק מנקודות על שאלה.

1. לאיליה יש מאזניים שמראים משקל מדויק של מה ששוקלים עליהם. לאיליה יש 8 תפוחים: 7 מתוכם אמיתיים, כולם שוקלים אותו משקל, ותפוח פלסטיק אחד ששוקל פחות מתפוח אמיתי. כל 8 התפוחים ביחד שוקלים 1250 גרם. 6 מתוך התפוחים שוקלים 900 גרם (אבל לא ידוע אם אחד מהם עשוי מפלסטיק). כמה שוקל תפוח אמיתי וכמה שוקל תפוח פלסטיק?



**תשובה:** תפוח אמיתי – 175 גרם, תפוח פלסטיק – 25 גרם.

#### פתרון:

אם 6 התפוחים ששוקלים 900 גרם היו כולם אמיתיים, אז משקל תפוח אמיתי היה אמור להיות  $150 = 900 : 6$  גרם. אז ב-8 תפוחים יש עוד תפוח אמיתי ותפוח פלסטיק, אבל  $200 = 1250 - 900 - 150$ , אז תפוח פלסטיק ישקול 200 גרם, וזה יותר מ-150 גרם, וזה אסור לפי השאלה. לכן ב-6 התפוחים שנשקלו יש תפוח פלסטיק. אז שני התפוחים הנוותרים הם אמיתיים ושוקלים יחד  $350 = 1250 - 900$  גרם, לכן תפוח אמיתי אחד שוקל  $175 = 350 : 2$  גרם. ב-900 גרם יש 5 תפוחים אמיתיים, והם שוקלים  $875 = 175 \times 5$  גרם, ואז תפוח פלסטיק שוקל 25 גרם. זה תואם לתנאי השאלה.

לכן האפשרות היחידה שמתאימה לתנאי השאלה היא: תפוח אמיתי שוקל 175 גרם ותפוח פלסטיק שוקל 25 גרם.

הערה:

בשאלה הזאת תשובה בלבד זה מספיק.



## האולימפיאדה הארצית במתמטיקה

### כיתות ג'

#### שלב הגמר, שנת תשפ"ו

משך התחרות – 3 שעות. אסור להשתמש במחשבון או בכל מה שמכיל מחשבון. יש לכבות את כל הטלפונים. יש לכתוב בעט, רק על הדפים הריקים שיחולקו על ידי המשגיחים, בצד אחד בלבד. ניתן לפנות למשגיחים עם כל שאלה. קבלת עזרה מכל אחד אחר **אסורה בהחלט**. שימו לב – בתחרות 6 שאלות. גם פתרונות חלקיים יכולים לתת חלק מנקודות על שאלה.

2. במעגל יושבים 10 אנשים במרווחים שווים, כל אחד מהם דובר אמת או שקרן.

דוברי אמת תמיד אומרים אמת, ושקרנים אף פעם לא אומרים אמת. ידוע שלפחות אחד מהאנשים הוא שקרן.

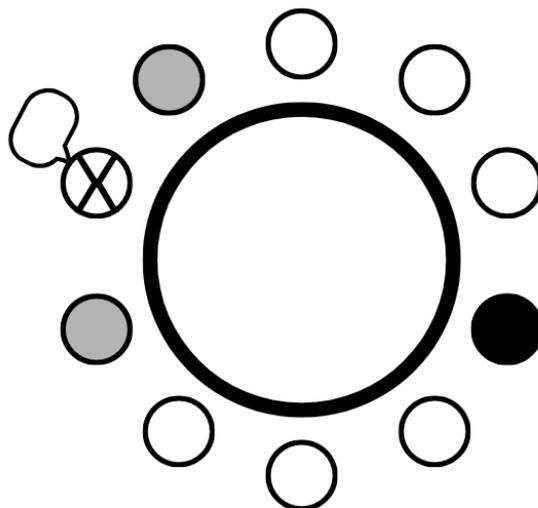
כל אחד מהאנשים אמר את המשפט הבא:

"שני האנשים שיושבים הכי קרוב אלי - דוברי אמת, או בן אדם שיושב הכי

רחוק ממני – שקרן" (או גם וגם)

האם זה אפשרי? אם כן, מצאו דוגמה שמראה שזה אפשרי, ואם לא – הוכיחו שזה לא אפשרי.

בתמונה – 10 אנשים מסביב לשולחן, בן אדם המסומן ב-X טוען ששני אנשים שלידי (מסומנים באפור) דוברי אמת, או שבן אדם הכי רחוק ממנו (זה שמולו, ומסומן בשחור) – שקרן.





## האולימפיאדה הארצית במתמטיקה

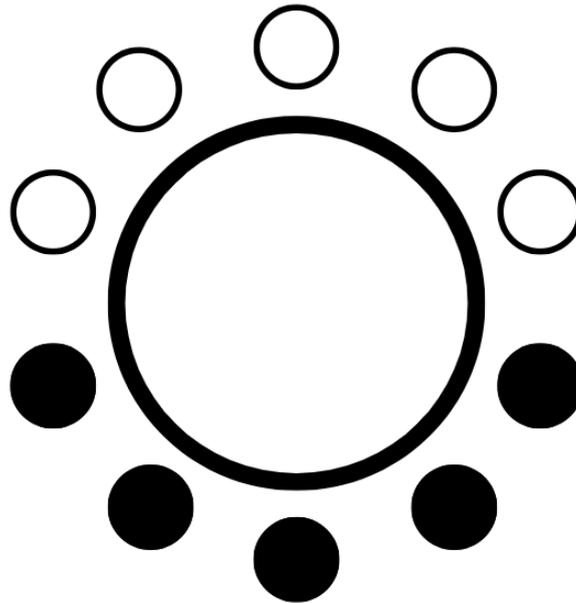
### כיתות ג'

### שלב הגמר, שנת תשפ"ו

משך התחרות – 3 שעות. אסור להשתמש במחשבון או בכל מה שמכיל מחשבון. יש לכבות את כל הטלפונים. יש לכתוב בעט, רק על הדפים הריקים שיחולקו על ידי המשגיחים, בצד אחד בלבד. ניתן לפנות למשגיחים עם כל שאלה. קבלת עזרה מכל אחד אחר **אסורה בהחלט**. שימו לב – בתחרות 6 שאלות. גם פתרונות חלקיים יכולים לתת חלק מנקודות על שאלה.

### **תשובה:**

בשחור – שקרנים, בלבן – דוברי אמת



### **פתרון:**

אם מול כל דובר אמת יושב שקרן, מול כל שקרן יושב דובר אמת, וליד כל שקרן יושב לפחות עוד שקרן אחד אז תנאי השאלה יתקיימו. לכן אם יש רצף של 5 שקרנים ואז רצף של 5 דוברי אמת – תנאי השאלה מתקיימים. הערה: זה הפתרון היחיד של השאלה. הערה: בשאלה הזאת תשובה בלבד זה מספיק.



## האולימפיאדה הארצית במתמטיקה

### כיתות ג'

#### שלב הגמר, שנת תשפ"ו

משך התחרות – 3 שעות. אסור להשתמש במחשבון או בכל מה שמכיל מחשבון. יש לכבות את כל הטלפונים. יש לכתוב בעט, רק על הדפים הריקים שיחולקו על ידי המשגיחים, בצד אחד בלבד. ניתן לפנות למשגיחים עם כל שאלה. קבלת עזרה מכל אחד אחר **אסורה בהחלט**. שימו לב – בתחרות 6 שאלות. גם פתרונות חלקיים יכולים לתת חלק מנקודות על שאלה.

3. תחליפו אותיות בספרות 1 ו-2 כך שיתקבל שוויון נכון:

$$A + B \times (C + D \times (E + F \times (G + H))) = 31$$

למשל אפשר להחליף ככה

$$1 + 1 \times (1 + 1 \times (1 + 2 \times (2 + 2)))$$

אבל אז במקום 31 נקבל 11.

#### תשובה:

$$1 + 2 \times (1 + 2 \times (1 + 2 \times (1 + 2))) = 31$$

#### פתרון:

אם ננסה לעשות מספר כמה שיותר גדול נרצה לקחת  $B = D = F = 2$  כדי להכפיל ב-2 ולא ב-1. אבל אז  $A = 1$  כי 31 איזוגי. אם

$$1 + 2 \times (C + D \times (E + F \times (G + H))) = 31$$

אז

$$2 \times (C + D \times (E + F \times (G + H))) = 30$$

ואז

$$C + D \times (E + F \times (G + H)) = 15$$

15 איזוגי, לכן  $C = 1$  כדי לאפשר  $D = 2$ , ונקבל

$$1 + 2 \times (E + F \times (G + H)) = 15$$

$$2 \times (E + F \times (G + H)) = 14$$

$$E + F \times (G + H) = 7$$

ממשיכים באותה צורה ומקבלים  $E = 1, F = 2, G + H = 3$

נוודא שזה עובד:

$$1 + 2 \times (1 + 2 \times (1 + 2 \times (1 + 2))) = 1 + 2 \times (1 + 2 \times (1 + 2 \times 3))$$

$$1 + 2 \times (1 + 2 \times (1 + 2 \times 3)) = 1 + 2 \times (1 + 2 \times 7) = 1 + 2 \times 15$$

$$1 + 2 \times 15 = 31$$

הערה:

בשאלה הזאת תשובה בלבד זה מספיק.



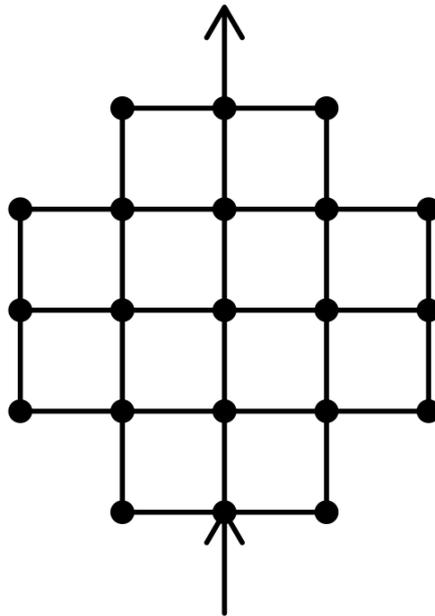
## האולימפיאדה הארצית במתמטיקה

### כיתות ג'

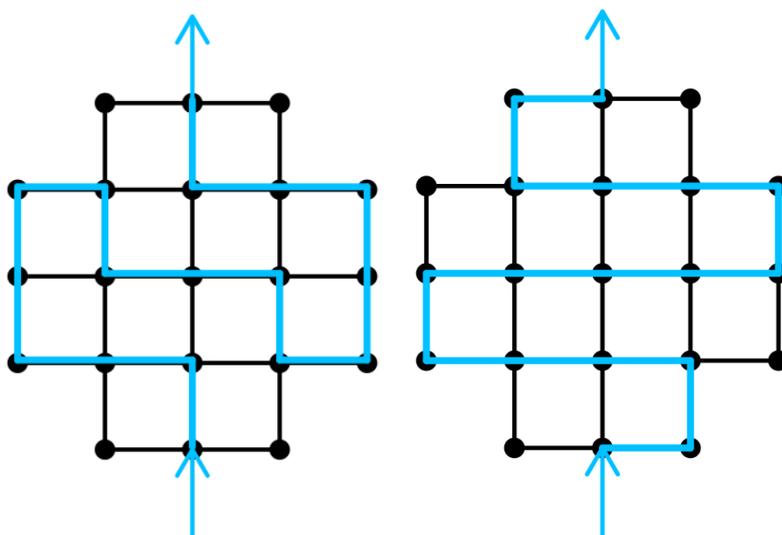
#### שלב הגמר, שנת תשפ"ו

משך התחרות – 3 שעות. אסור להשתמש במחשבון או בכל מה שמכיל מחשבון. יש לכבות את כל הטלפונים. יש לכתוב בעט, רק על הדפים הריקים שיחולקו על ידי המשגיחים, בצד אחד בלבד. ניתן לפנות למשגיחים עם כל שאלה. קבלת עזרה מכל אחד אחר **אסורה בהחלט**. שימו לב – בתחרות 6 שאלות. גם פתרונות חלקיים יכולים לתת חלק מנקודות על שאלה.

4. בצירור הבא 21 נקודות מסומנות, וקווים שמחברים בינם. אורך של כל קו שמחבר שתי נקודות סמוכות הוא 1. מצאו מסלול ארוך ביותר שעובר על הקווים שבצירור, מתחיל ומסתיים במקומות המסומנים, ולא עובר באותה נקודה פעמיים. (אסור לעבור בנקודה מסומנת עוד פעם אם כבר עברנו בה)



#### תשובות אפשריות:



יש עוד הרבה פתרונות, בכל פתרון נכון לא מגיעים ל-4 מתוך הנקודות המסומנות.



## האולימפיאדה הארצית במתמטיקה

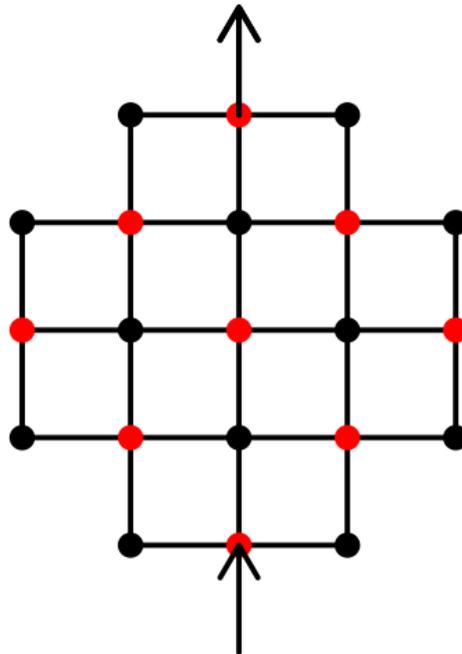
### כיתות ג'

#### שלב הגמר, שנת תשפ"ו

משך התחרות – 3 שעות. אסור להשתמש במחשבון או בכל מה שמכיל מחשבון. יש לכבות את כל הטלפונים. יש לכתוב בעט, רק על הדפים הריקים שיחולקו על ידי המשגיחים, בצד אחד בלבד. ניתן לפנות למשגיחים עם כל שאלה. קבלת עזרה מכל אחד אחר **אסורה בהחלט**. שימו לב – בתחרות 6 שאלות. גם פתרונות חלקיים יכולים לתת חלק מנקודות על שאלה.

### **פתרון:**

נצבע את הנקודות כך:



המסלול עובר מנקודות אדומות רק לנקודות שחורות, ומנקודות שחורות רק לנקודות אדומות. יש רק 9 נקודות אדומות, ו-12 נקודות שחורות. מתחילים ומסיימים בנקודה אדומה, אז בין 9 הנקודות האדומות יכולות להיות רק 8 נקודות שחורות, וזה משאיר 4 נקודות שחורות שלא נוכל לעבור בהן.

הערה:

בשאלה הזאת תשובה בלבד זה מספיק.



## האולימפיאדה הארצית במתמטיקה

### כיתות ג'

#### שלב הגמר, שנת תשפ"ו

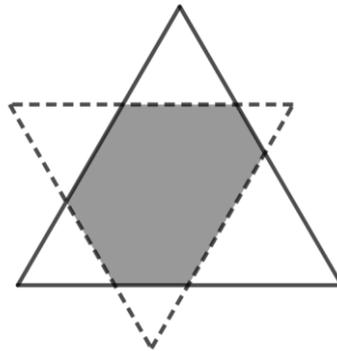
משך התחרות – 3 שעות. אסור להשתמש במחשבון או בכל מה שמכיל מחשבון. יש לכבות את כל הטלפונים.

יש לכתוב בעט, רק על הדפים הריקים שיחולקו על ידי המשגיחים, בצד אחד בלבד.

ניתן לפנות למשגיחים עם כל שאלה. קבלת עזרה מכל אחד אחר **אסורה בהחלט**.

שימו לב – בתחרות 6 שאלות. גם פתרונות חלקיים יכולים לתת חלק מנקודות על שאלה.

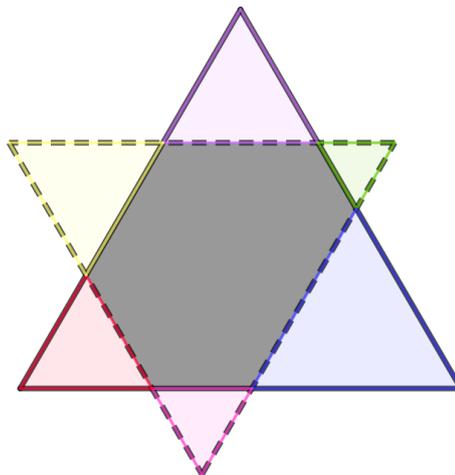
5. דוד רצה לצייר מגן דוד. הוא צייר שני משולשים שווים צלעות, מקבילים זה לזה (עם צלעות באותם 3 כיוונים, כמתואר בציור), אך לא באותו גודל ולא עם אותו מרכז. היקף של המשולש הראשון הוא 17, והיקף של המשולש השני הוא 16. מצאו את ההיקף של המשושה שנוצר באמצע. נמקו היטב את תשובתכם. הערה: בגלל שהמשולשים הגדולים מקבילים זה לזה מותר להניח כי 6 המשולשים הקטנים הם גם שווים צלעות, את זה אין צורך להוכיח.
- בציור: משולש ראשון – קו שחור מלא, משולש שני – קו מקווקו. משושה – צבוע באפור.



**תשובה: 11**

**פתרון:**

סכום ההיקפים של שני המשולשים הגדולים הוא  $17 + 16 = 33$ , והוא כולל את כל הקטעים שבציור. זה גם סכום ההיקפים של 6 המשולשים הקטנים. כל המשולשים הקטנים הם גם שווים צלעות לכן בכל אחד מהמשולשים הקטנים אורך של צלע אחת שווה בדיוק לשליש מההיקף. ההיקף של המשושה הפנימי מכיל בדיוק צלע אחת מכל אחד מהמשולשים הקטנים, לכן ההיקף שווה ל- $33:3 = 11$ .





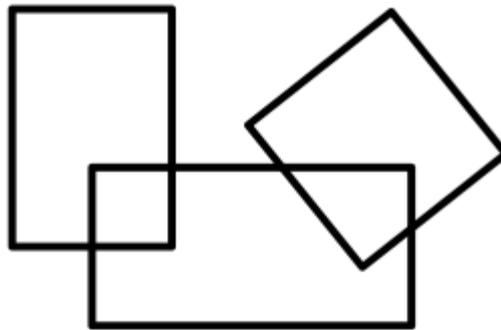
## האולימפיאדה הארצית במתמטיקה

### כיתות ג'

#### שלב הגמר, שנת תשפ"ו

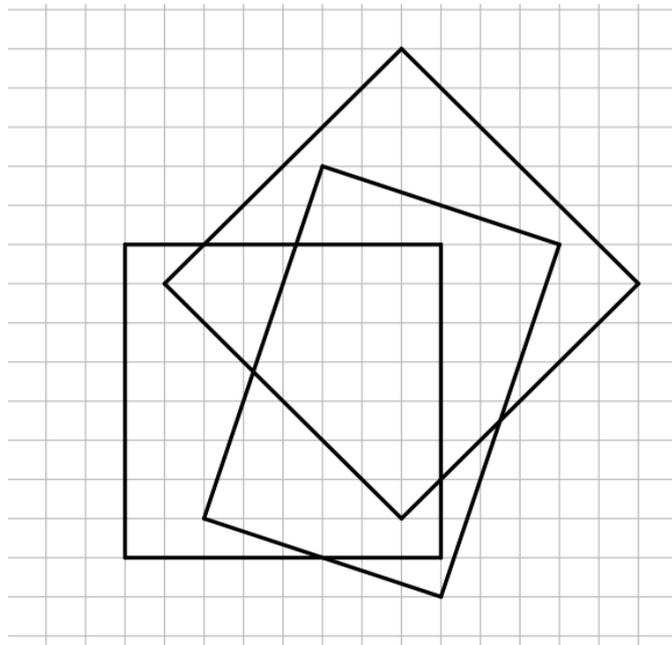
משך התחרות – 3 שעות. אסור להשתמש במחשבון או בכל מה שמכיל מחשבון. יש לכבות את כל הטלפונים. יש לכתוב בעט, רק על הדפים הריקים שיחולקו על ידי המשגיחים, בצד אחד בלבד. ניתן לפנות למשגיחים עם כל שאלה. קבלת עזרה מכל אחד אחר **אסורה בהחלט**. שימו לב – בתחרות 6 שאלות. גם פתרונות חלקיים יכולים לתת חלק מנקודות על שאלה.

6. סרטטו 3 מלבנים, כך שבתוך כל אחד מהם יהיו בדיוק 3 קודקודים של מלבנים אחרים (בסך הכל). אסור שקודקוד של אחד המלבנים יהיה על קודקוד או צלע של מלבן אחר. בדוגמה הבאה 3 מלבנים, במלבן האמצעי יש 2 קודקודים של מלבנים אחרים, ובכל אחד מהאחרים – קודקוד אחד.



#### **תשובה אפשרית:**

הציור על דף משבצות כדי שיהיה יותר ברור שזה באמת מלבנים.



**בהצלחה!**