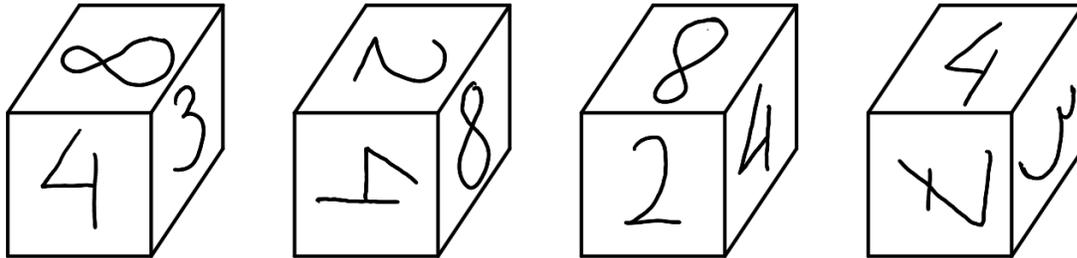




האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ד'-ה'
 שלב ב, שנת תשפ"ו

1. לנבו יש 4 קוביות זהות. על כל קובייה כתובים מספרים 2,3,4,6,7,8, באותה צורה ובאותו סדר על כל הקוביות. הוא שם 4 קוביות על השולחן בצורה הבאה:



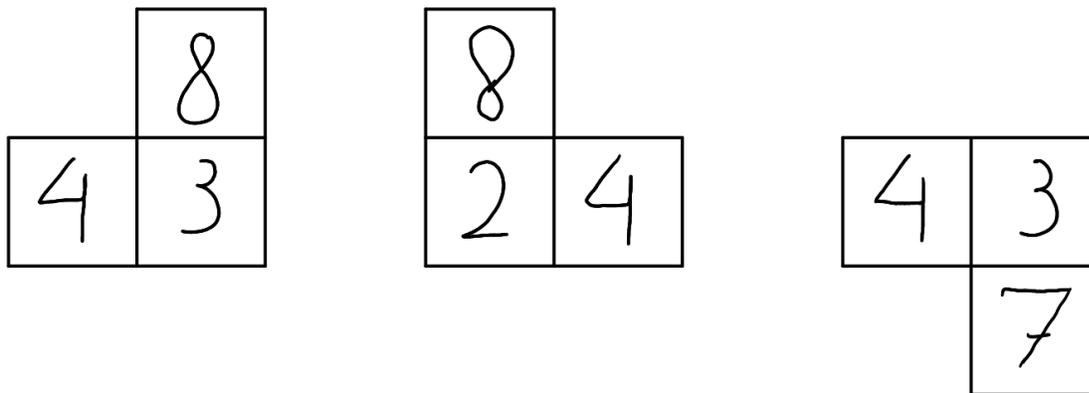
רשמו את הספרות שמופיעות על הפאות התחתונות של הקוביות, משמאל לימין.

(רשמו את הספרות רצוף, כמספר 4-ספרתי. לדוגמה אם היה מדובר על הפאות העליונות ולא הפאות התחתונות – הייתם רושמים 8284)

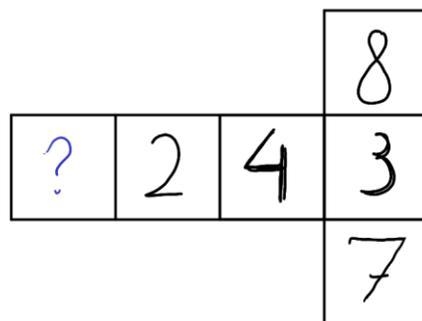
תשובה: 7376

פתרון:

אם ננסה לפרוס את החלקים שאנחנו רואים בנתונים, נקבל:



(ה-8 הפוך בתמונה השנייה, ה-3 הוא "מתחת" ל-8, וה-2 "מעל")
 נאחד את הפריסות לפריסה אחת של קובייה ונקבל:

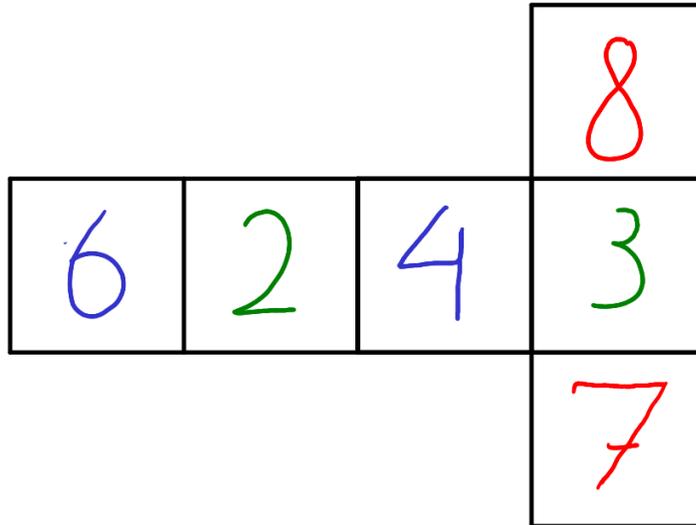




האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ד'-ה'

שלב ב, שנת תשפ"ו

נתון שמספרים שעל הקובייה הם 2,3,4,6,7,8, אז הספרה החסרה היא 6. נסמן את הספרות שעל הפאות הנגדיות בצבעים מתאימים:



מכאן אם המספר על הפאות העליונות של קוביות הוא 8284, המספר על הפאות התחתונות של קוביות יהיה 7376.



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ד'-ה'

שלב ב, שנת תשפ"ו

2. מריה צובעת אלכסונים בלוח כפל של מספרים מ-1 עד 10. האלכסונים שהיא צובעת הולכים מצד שמאלי תחתון לצד ימני עליון, כמו בציר:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

מצאו את הסכום הגדול ביותר של מספרים באלכסון כזה.

לדוגמה:

סכום מספרים באלכסון הצהוב (העליון):

$$7 + 12 + 15 + 16 + 15 + 12 + 7 = 84$$

סכום מספרים באלכסון הירוק (התחתון):

$$70 + 72 + 72 + 70 = 284$$

תשובה: 320

פתרון:

אנחנו מחפשים אלכסון שסכום המספרים בו הוא הכי גדול. זה אומר שבאלכסונים סמוכים הסכומים צריכים להיות יותר קטנים.

נשים לב, שבכל עמודה הפרש בין מספר ומספר מתחתיו הוא שווה למספר שממנו מתחילה העמודה. למשל $5 \cdot 6 - 5 \cdot 5 = 5 \cdot 6 - 5 \cdot 5 = 30 - 25 = 5$.

אם נעבור מאלכסון לאלכסון שמתחתיו – מספרים הולכים לגדול, אבל אחד המספרים יכול להיעלם. למשל:

$$50 + 54 + 56 + 56 + 54 + 50 = (40 + 10) + (45 + 9) + (48 + 8) + (49 + 7) + (48 + 6) + (45 + 5) + 40 - 40$$

כלומר הפרש בין האלכסון של 50 לאלכסון של 40 הוא

$$10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 - 40 = 5 > 0$$

אבל הפרש בין האלכסון של 60 לאלכסון של 50 הוא

$$10 + 9 + 8 + 7 + 6 - 50 = -10 < 0$$

(ובאלכסונים הבאים הפרש ממשיך להיות שלילי)

לכן האלכסון עם הסכום הגדול ביותר הוא האלכסון של 50 והסכום הוא

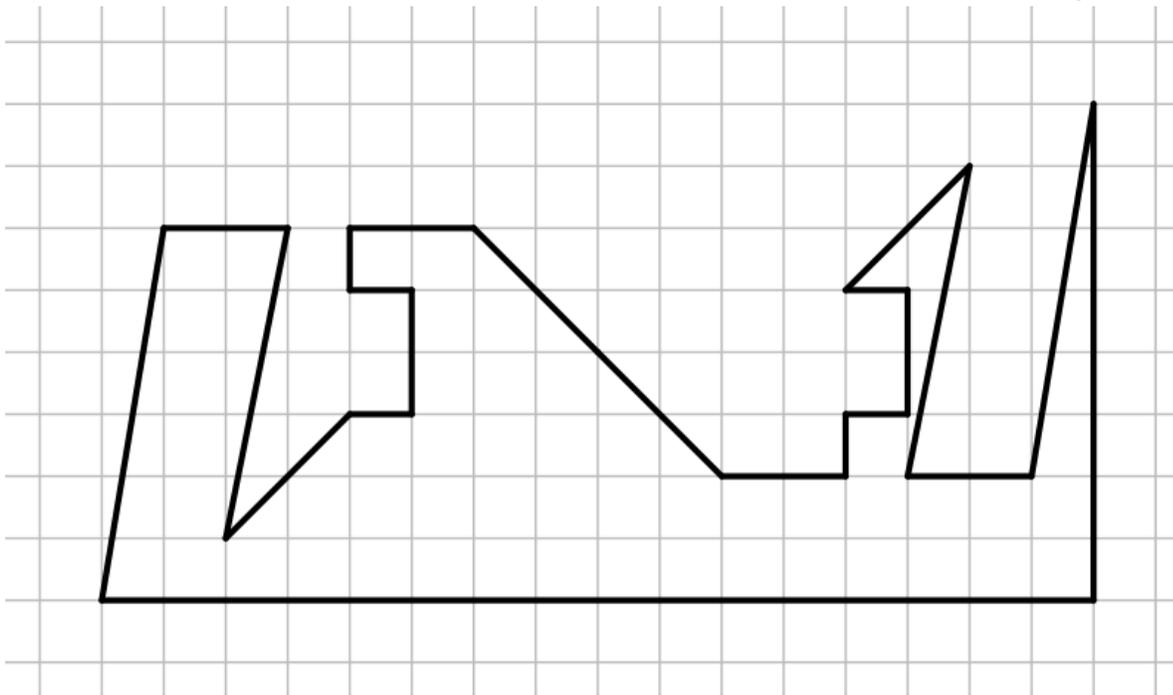
$$50 + 54 + 56 + 56 + 54 + 50 = 320$$

הערה: אם היה מותר לקחת אלכסונים גם בכיוון האחר, היינו מקבלים סכום 385 באלכסון הכי ארוך.



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ד'-ה'
 שלב ב, שנת תשפ"ו

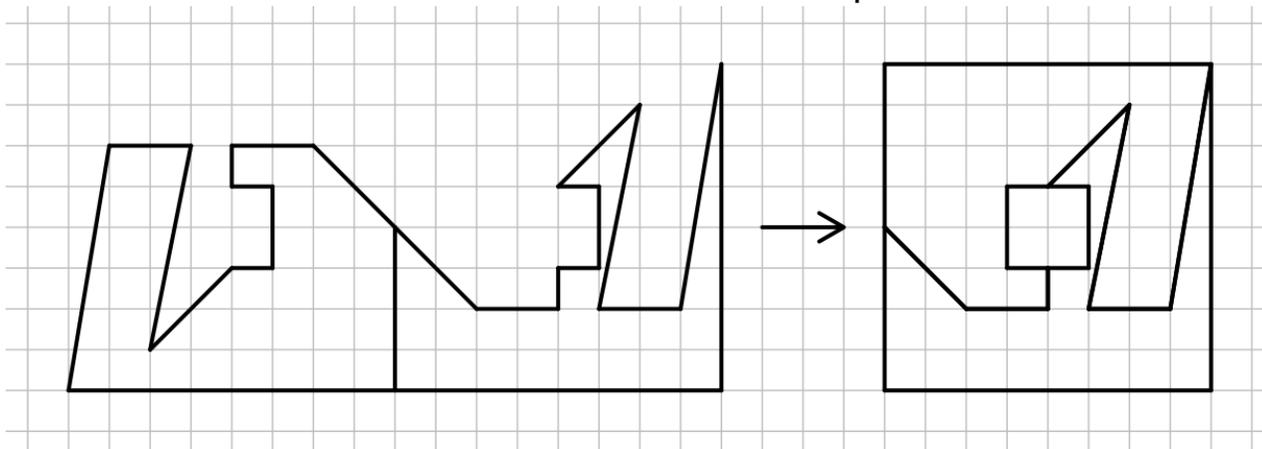
3. בדף משבצות הבא שטח כל משבצת הוא 1. מצאו את שטח הצורה הבאה:



תשובה: 60

פתרון:

אם נחתוך את המורע בקו אנכי באמצע, נקבל חלקים שאפשר להרכיב מהם ריבוע 8 על 8 עם חור בגודל 2 על 2 כך:

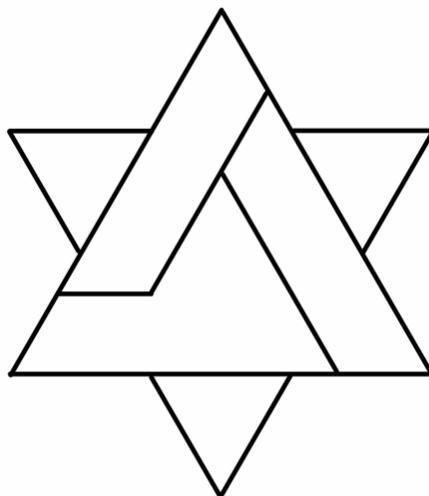


ולכן שטח הצורה שווה לשטח הריבוע עם חור, כלומר ל- $8 \times 8 - 2 \times 2 = 60$.



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ד'-ה'
שלב ב, שנת תשפ"ו

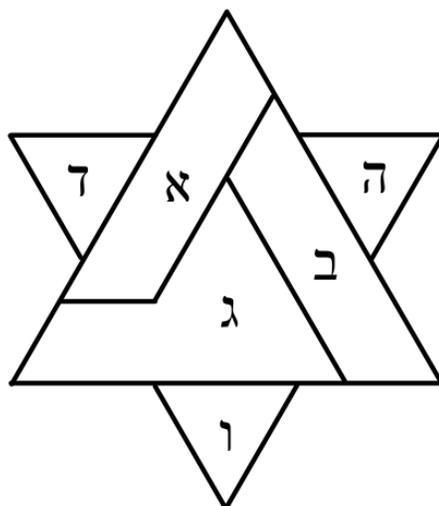
4. בציור מפה בצורת מגן דוד. **בכמה דרכים שונות** אפשר לצבוע את 6 האזורים של המפה באדום, כחול וירוק, כך שלא יהיו שני אזורים סמוכים צבועים באותו צבע?



תשובה: 48

פתרון:

נסמן את האזורים כך:



יש 3 אפשרויות לבחור צבע ל-א. אזור ב צריך להיות צבוע בצבע שונה מ-א, אז יש לו שתי אפשרויות. לאזור ג נשארת אפשרות אחת. ואז לאזורים ד,ה,ו יש שתי אפשרויות לכל אחד. סה"כ $48 = 6 \cdot 8 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ד'-ה'
שלב ב, שנת תשפ"ו

5. איילה כתבה במחשב מספר תלת-ספרתי ושאלה את המחשב מה התכונות שלו.
המחשב ענה:

- כל הספרות במספר זהות
- הספרה השמאלית היא 1
- הספרה האמצעית היא 7
- הספרה הכי שמאלית קטנה מהספרה הכי ימנית
- יש במספר ספרה זוגית

מסתבר שכל המשפטים היו לא נכונים, ואיילה ביקשה מהמחשב לתקן אותם והפעם לתת תכונות נכונות. הפעם המחשב כתב:

- כל הספרות במספר שונות
- הספרה הימנית היא 7
- הספרה הכי שמאלית גדולה מהספרה הכי ימנית
- יש במספר ספרה שמתחלקת ב-3

מסתבר שגם כל המשפטים האלה היו לא נכונים. **מה היה המספר שאיילה כתבה במחשב?**

תשובה: 515

פתרון:

נתון כי כל המשפטים לא נכונים. נרשום את השלילה שלהם (כלומר את המשפטים הנכונים המתאימים להם):

- לא כל הספרות במספר זהות
- הספרה השמאלית היא לא 1
- הספרה האמצעית היא לא 7
- הספרה הכי שמאלית לא קטנה מהספרה הכי ימנית
- אין במספר ספרה זוגית
- לא כל הספרות במספר שונות
- הספרה הימנית היא לא 7
- הספרה הכי שמאלית לא גדולה מהספרה הכי ימנית
- אין במספר ספרה שמתחלקת ב-3

קודם כל בגלל שאין במספר ספרה זוגית ואין ספרה שמתחלקת ב-3 – זה אומר שיכולות להיות במספר רק ספרות 1,5,7.

הספרה הכי שמאלית לא קטנה ולא גדולה מהספרה הכי ימנית, לכן הן שוות. לא כל הספרות במספר שוות, אז הספרה האמצעית שונה מהספרה השמאלית.

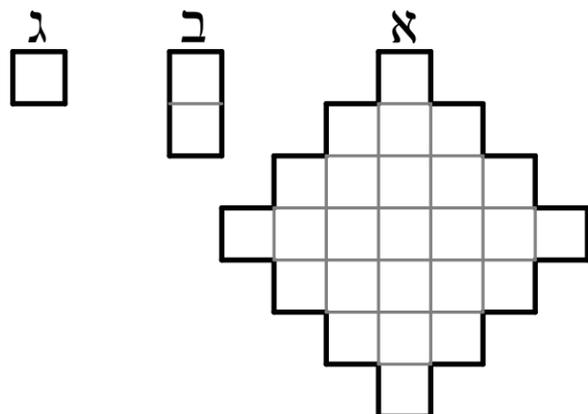


האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ד'-ה'
שלב ב, שנת תשפ"ו

הספרה השמאלית היא לא 1, והספרה הימנית היא לא 7, והן שוות זו לזו, לכן שתיהן שוות ל-5.
הספרה האמצעית היא לא 5, וגם לא 7, לכן היא 1.
סה"כ קיבלנו 515.



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ד'-ה'
 שלב ב, שנת תשפ"ו



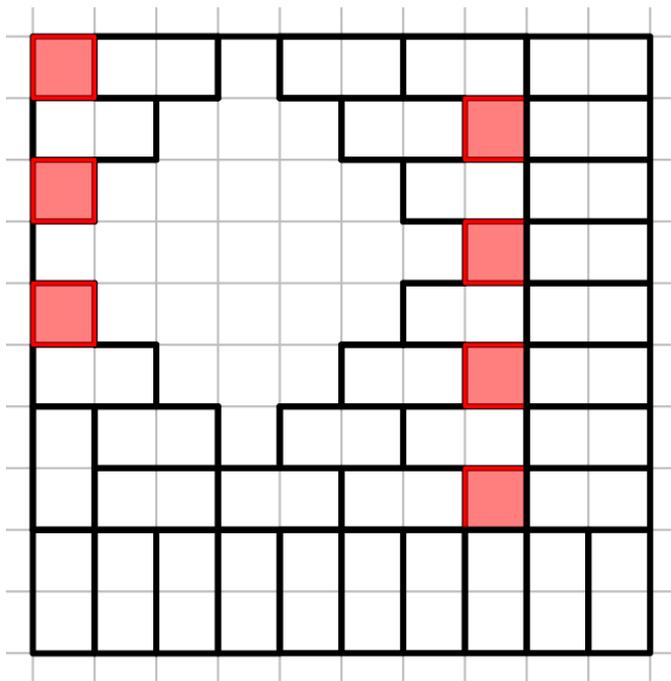
6. לבני יש לוח משבצות 10×10 . הוא מרצף אותו עם מרצפות בצורות המתוארות בצירוף: (א) צורת "יהלום" המורכבת מ-25 משבצות, (ב) צורת "דומינו" המורכבת משתי משבצות (מותר גם לסובב את הדומינו), ו-(ג) משבצת בודדת. הוא רוצה להשתמש בדיוק ב"יהלום" אחד, בכמה שיותר "דומינו", וכמה שפחות משבצות בודדות. מה הכמות הקטנה ביותר של משבצות בודדות בהן יצטרך בני להשתמש?

הערה: למרצפות אסור לעלות זו על זו, ואסור לצאת מגבולות הלוח. אסור לחתוך מרצפות לחלקים, וכל הלוח צריך להיות מלא.

תשובה: 7

פתרון:

קודם כל נבנה דוגמה:

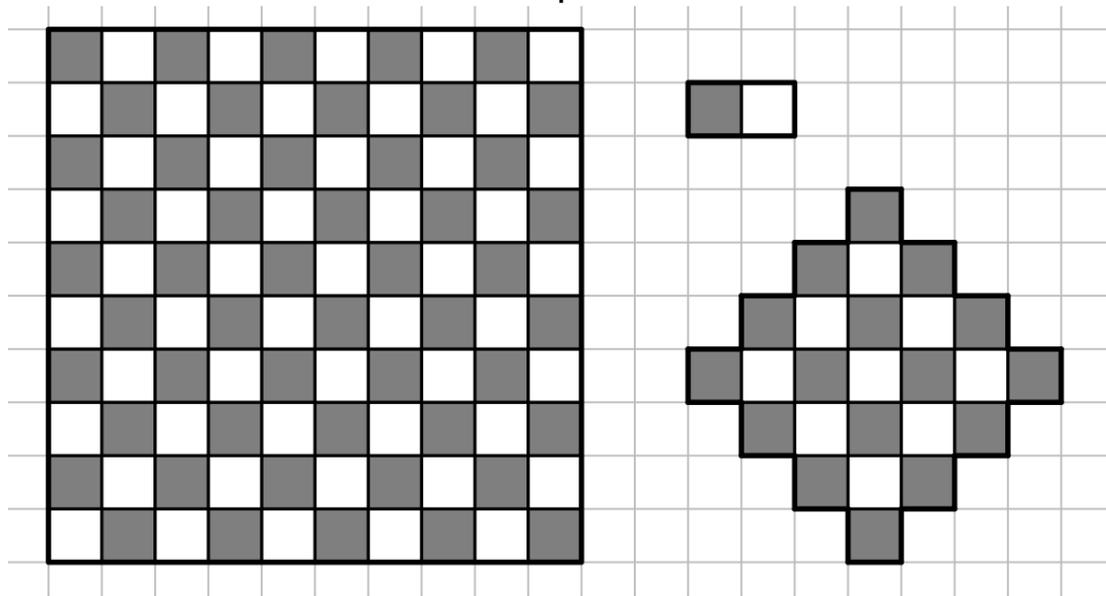




האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ד'-ה'

שלב ב, שנת תשפ"ו

עכשיו נוכיח שאי אפשר פחות מ-7 משבצות בודדות. אם נצבע את הלוח בצביעת שח – בלוח תהיה אותה כמות של משבצות שחורות ולבנות. כל הדומינו מכסים אותה כמות של משבצות לבנות ושחורות (בכל דומינו משבצת לבנה ומשבצת שחורה), ובצורת יהלום 16 משבצות מצבע אחד ו-9 מצבע אחר. לכן חייבים 7 משבצות מהצבע החסר כדי לאזן את הכמויות.



בהצלחה!