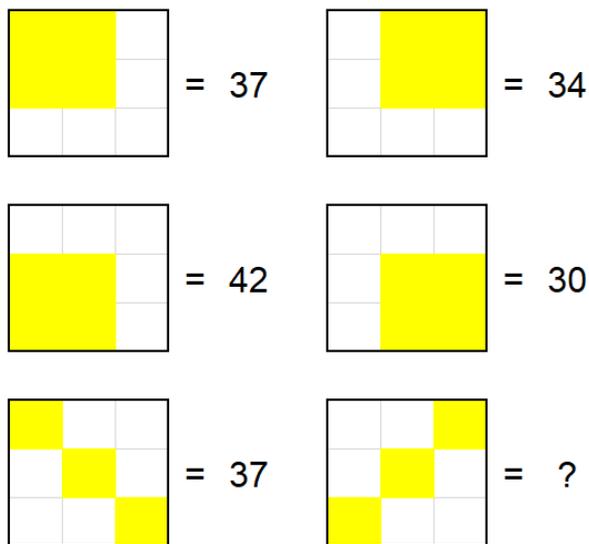




האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ו' ו-ז'

שלב ב, שנת תשפ"ו



1. לנו יש טבלה בגודל 3×3 משבצות.

בכל משבצת הוא רשם מספר.

נתונים סכומים של רביעיות המספרים

בכל אחד מריבועים 2×2 , ונתון

סכום המספרים באחד האלכסונים.

מצאו את סכום המספרים באלכסון

השני.

(סכום המספרים בריבוע 2×2 שמאלי עליון

הוא 37, סכום המספרים בריבוע 2×2 ימני

עליון הוא 34, סכום המספרים בריבוע

2×2 שמאלי תחתון הוא 42, סכום

המספרים בריבוע 2×2 ימני תחתון הוא

30, וסכום שלושת המספרים באלכסון

שהולך ימינה ולמטה הוא 37)

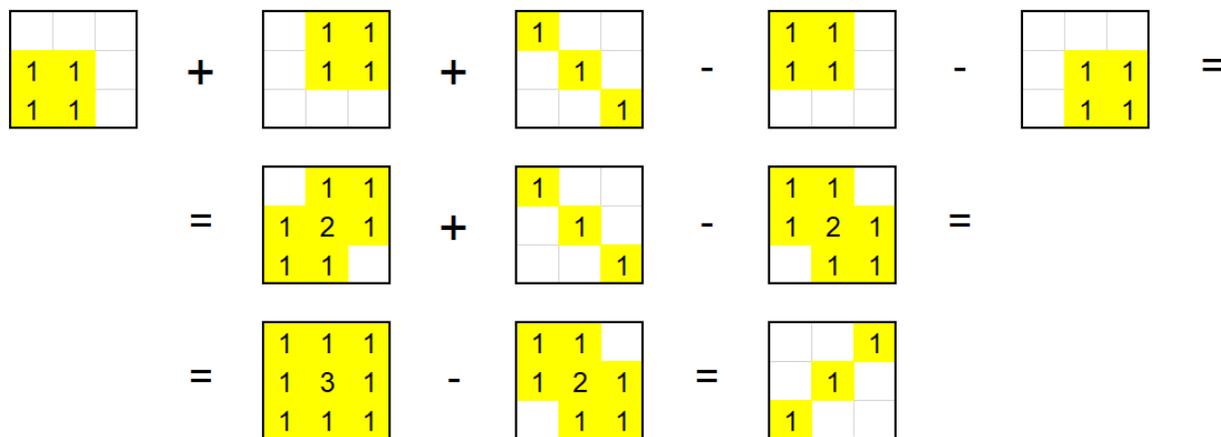
תשובה: 46

פתרון:

אפשר לקבל את האלכסון הרצוי כך:



כדי לוודא, נסמן בכל משבצת כמה פעמים ספרנו אותה בסכום הכולל:



$$34 + 42 + 37 - 37 - 30 = 46$$

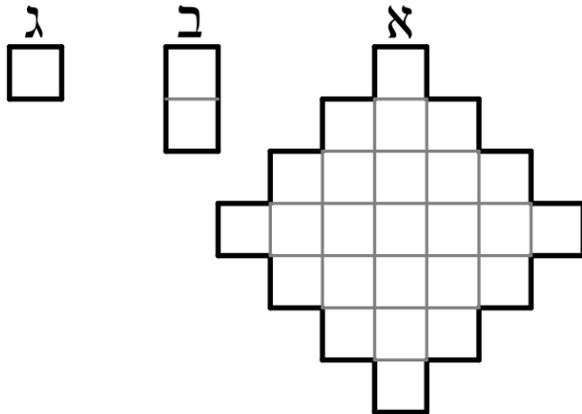
לכן התוצאה היא 46. הערה: אי אפשר לגלות בוודאות את המספרים שבטבלה, אבל אפשר למצוא דוגמאות למספרים כאלה, למשל:

37	0	34
0	0	0
12	30	0



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ו'-ז'

שלב ב, שנת תשפ"ו



2. לבני יש לוח משבצות 20×20 . הוא מרצף אותו עם מרצפות בצורות המתוארות בצירוף: (א) צורת "הלום" המורכבת מ-25 משבצות, (ב) צורת "דומינו" המורכבת משתי משבצות (מותר גם לסובב את הדומינו), ו-(ג) משבצת בודדת. הוא רוצה להשתמש בשלושה "יהלומים" בדיוק, בכמה שיותר "דומינו", וכמה שפחות משבצות בודדות. **מה הכמות הקטנה ביותר של משבצות בודדות בהן יצטרך בני להשתמש?**

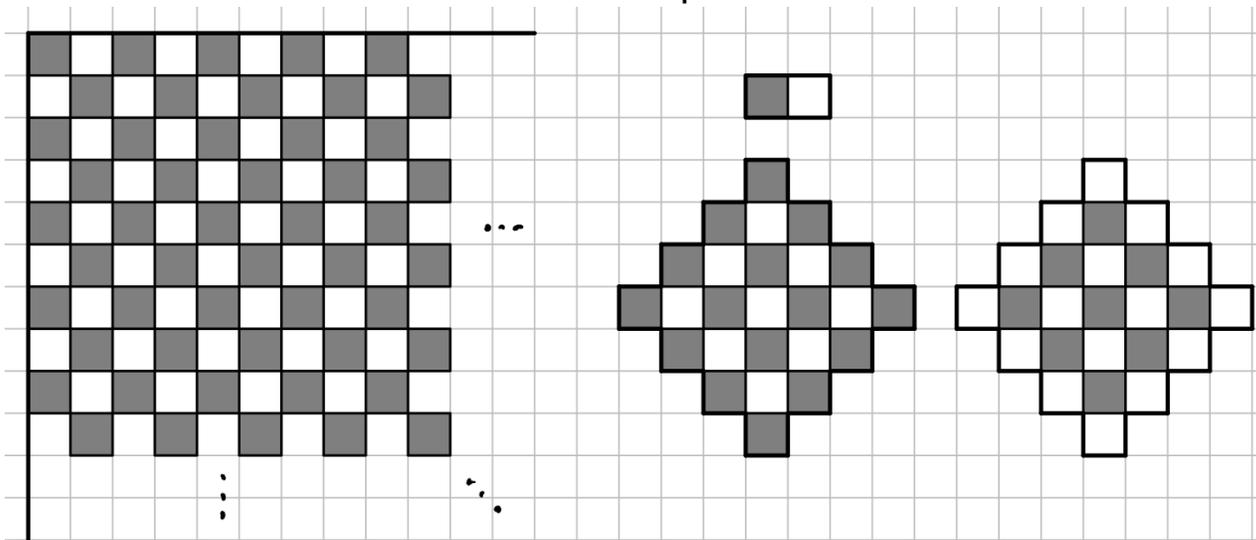
הערה: למרצפות אסור לעלות זו על זו, ואסור לצאת מגבולות הלוח. אסור לחתוך מרצפות לחלקים, וכל הלוח צריך להיות מלא.

תשובה: 7

פתרון:

קודם כל נשים לב שאם נצבע את הלוח בצביעת שח – בלוח תהיה אותה כמות של משבצות שחורות ולבנות.

כל הדומינו מכסים אותה כמות של משבצות לבנות ושחורות (בכל דומינו משבצת לבנה ומשבצת שחורה), ובצורת יהלום 16 משבצות מצבע אחד ו-9 מצבע אחר. יש כמות אי-זוגית של יהלומים, לכן הם לא יכולים לאזן זה את זה לגמרי, וחייבים לפחות 7 משבצות מהצבע החסר כדי לאזן את הכמויות.





האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ו'-ז'
שלב ב, שנת תשפ"ו

3. איילה כתבה במחשב מספר ארבע-ספרתי ושאלה את המחשב מה התכונות שלו.
המחשב ענה:

- כל הספרות במספר זהות
 - המספר מתחלק ב-4
 - המספר לא מתחלק ב-9
 - ההפרש בין הספרה הכי גדולה והספרה הכי קטנה הוא 3 או פחות
 - הספרה הכי שמאלית קטנה מהספרה הכי ימנית
- מסתבר שכל המשפטים היו לא נכונים, ואיילה ביקשה מהמחשב לתקן אותם והפעם לתת תכונות נכונות. הפעם המחשב כתב:

- כל הספרות במספר שונות
 - המספר מתחלק ב-5
 - המספר לא מתחלק ב-11
 - ההפרש בין הספרה הכי גדולה והספרה הכי קטנה הוא 7 או יותר
 - הספרה הכי שמאלית גדולה מהספרה הכי ימנית
- מסתבר שגם כל המשפטים האלה היו לא נכונים. **מה היה המספר של איילה?**

תשובה: 7227

פתרון:

נתון כי כל המשפטים לא נכונים. נרשום את השלילה שלהם (כלומר את המשפטים הנכונים המתאימים להם):

- לא כל הספרות במספר זהות
- המספר לא מתחלק ב-4
- המספר מתחלק ב-9
- ההפרש בין הספרה הכי גדולה והספרה הכי קטנה גדול מ-3
- הספרה הכי שמאלית לא קטנה מהספרה הכי ימנית
- לא כל הספרות במספר שונות
- המספר לא מתחלק ב-5
- המספר מתחלק ב-11
- ההפרש בין הספרה הכי גדולה והספרה הכי קטנה קטן מ-7
- הספרה הכי שמאלית לא גדולה מהספרה הכי ימנית

נסמן את המספר ב- $ABCD$.

המספר מתחלק גם ב-11 וגם ב-9, לכן הוא מתחלק ב-99. נכתוב את המספר כך:

$$ABCD = AB \cdot 100 + CD = AB \cdot 99 + AB + CD$$



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ו'-ז'

שלב ב, שנת תשפ"ו

אז כדי ש- $ABCD$ יתחלק ב-99 צריך ש- $AB + CD$ יתחלק ב-99. זה אומר ש-

$$AB + CD = 99$$

או ש- $AB = CD = 99$. המקרה הזה לא אפשרי כי אז כל הספרות זהות.

$$AB + CD = 99, \text{ ולכן } A + C = 9, B + D = 9$$

מנתונים הספרה הכי שמאלית לא קטנה ולא גדולה מהספרי הכי ימנית, ולכן הן

שוות: $A = D$, וקיבלנו שהמספר הוא $ABBA$ כאשר $A + B = 9$.

ההפרש בין הספרה הגדולה לקטנה קטן מ-7 וגדול מ-3, כלומר

$$3 < |A - B| < 7$$

אך בגלל ש- $A + B = 9$ ההפרש הזה יהיה אי-זוגי, ולכן $|A - B| = 5$. לכן

האפשרויות היחידות הן 7227 ו-2772, אך 2772 מתחלק ב-4, לכן האפשרות

היחידה היא 7227.



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ו'-ז'

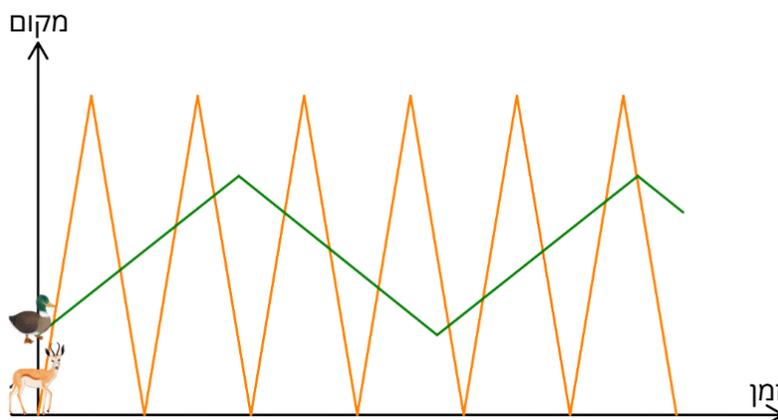
שלב ב, שנת תשפ"ו

4. איילה וברווז רצים ריצת בוקר שלהם. איילה מתחילה בקצה של מסלול שאורכו 200 מטר, ורצה מקצה לקצה ובחזרה, במהירות קבועה של 19 קילומטר לשעה. ברווז רץ במסלול שאורכו 100 מטר, שנמצא בדיוק באמצע של מסלול בו רצה איילה, כמו שמתואר בציור. גם הוא רץ מקצה לקצה ובחזרה, במהירות קבועה של 5 קילומטר לשעה. שניהם מתחילים באותו הזמן בקצה הדרומי של המסלולים, ומסיימים בדיוק שעה אחת אחרי ההתחלה. כמה פעמים איילה וברווז נפגשו במהלך השעה הזאת?
(בקילומטר יש 1000 מטרים)



תשובה: 95

פתרון: בכל פעם שאיילה רצה מקצה אחד לקצה שני היא פוגשת את הברווז בדיוק פעם אחד. זה כי היא בטוח עוברת אותו, לא משנה לאיזה כיוון הוא רץ, וגם הברווז רץ לאט יותר ולא יוכל להשיג את איילה בפעם השנייה. אז כמות הפגישות שווה לכמות הפעמים שאיילה רצה מקצה לקצה של המסלול בשעה אחת. איילה עושה 19000 מטרים בשעה, כלומר $95 = \frac{19000}{200}$ מסלולים בשעה. לכן היא תפגוש את ברווז 95 פעמים בדיוק. בתמונה: התחלה של גרף התנועה שלהם.



הערה: אם מסלול של ברווז היה מתחיל או מסתיים בקצה של מסלול של איילה – שני מפגשים היו יכולים להתלכד למפגש אחד בקצה המסלול, והיה צריך להתחשב בזה בחישוב.



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ו'-ז'

שלב ב, שנת תשפ"ו

5. בתרגיל כפל הבא ספרות זהות הוחלפו באותיות זהות, וספרות שונות – באותיות שונות:

$$\begin{array}{r}
 \times \quad \quad \text{ד ג} \\
 \quad \quad \quad \text{ח ג} \\
 \hline
 + \quad \text{ד ג ר} \\
 \quad \quad \text{ד ב} \\
 \hline
 \text{ד ג ל}
 \end{array}$$

מצאו את תוצאת הכפל, כלומר את המספר "דגל".

תשובה: 520

פתרון:

ד חייב להיות 0 בגלל החיבור:

$$\begin{array}{r}
 \times \quad \quad \text{ג 0} \\
 \quad \quad \quad \text{ח ג} \\
 \hline
 + \quad \text{ר ג 0} \\
 \quad \quad \text{ב 0} \\
 \hline
 \text{ל ג 0}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \times \quad \quad \text{ד ג} \\
 \quad \quad \quad \text{ח ג} \\
 \hline
 + \quad \text{ר ג ד} \\
 \quad \quad \text{ב ד} \\
 \hline
 \text{ל ג ד}
 \end{array}$$

כעת מהכפל מקבלים $2 \leq \text{ג} \leq 3$, והאפשרויות הן:

$$\begin{array}{r}
 \times \quad \quad \text{3 0} \\
 \quad \quad \quad \text{3 ח} \\
 \hline
 + \quad \text{ר 3 0} \\
 \quad \quad \text{9 0} \\
 \hline
 \text{ל 3 0}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \times \quad \quad \text{2 0} \\
 \quad \quad \quad \text{2 ח} \\
 \hline
 + \quad \text{ר 2 0} \\
 \quad \quad \text{4 0} \\
 \hline
 \text{ל 2 0}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \times \quad \quad \text{ג 0} \\
 \quad \quad \quad \text{ח ג} \\
 \hline
 + \quad \text{ר ג 0} \\
 \quad \quad \text{ב 0} \\
 \hline
 \text{ל ג 0}
 \end{array}$$

אבל אז אם $\text{ג} = 3$ נקבל $9 > \text{ל}$ וזה לא אפשרי, לכן $\text{ג} = 2$ היא האפשרות היחידה. $120 = 20 \times 6$ זו הדרך היחידה להכפיל 20 במספר חד-ספרתי ולקבל תוצאה תלת-ספרתית שנגמרת ב-20, לכן התרגיל המקורי הוא:

$$\begin{array}{r}
 \times \quad \quad \text{2 0} \\
 \quad \quad \quad \text{2 6} \\
 \hline
 + \quad \text{1 2 0} \\
 \quad \quad \text{4 0} \\
 \hline
 \text{5 2 0}
 \end{array}$$

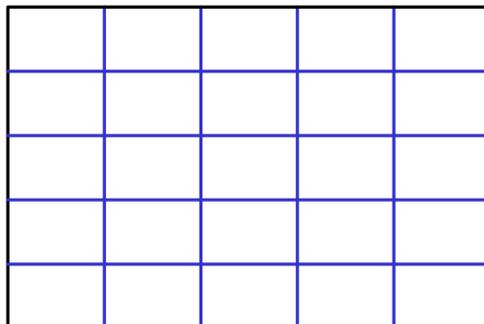
ולכן "דגל" הוא 520.



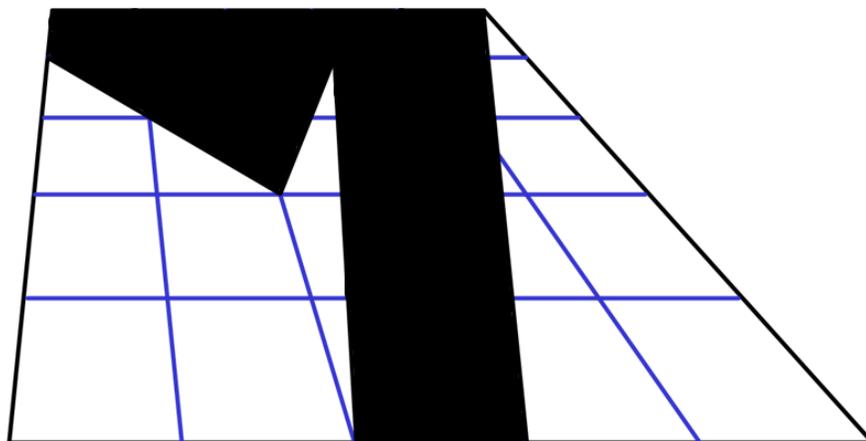
האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ו'-ז'

שלב ב, שנת תשפ"ו

6. לאיליה היה דף מלבני, ששטחו 625, והוא חילק אותו עם קוים אופקיים ואנכיים ל- 5×5 משבצות מלבניות חופפות כך:



לאחר מכן הוא צבע בשחור מצולע על הדף (קודקודי מצולע היו בקודקודי משבצות), שם את הדף על השולחן, וצילם אותו מהצד. התמונה שיצאה לו נראתה כך:

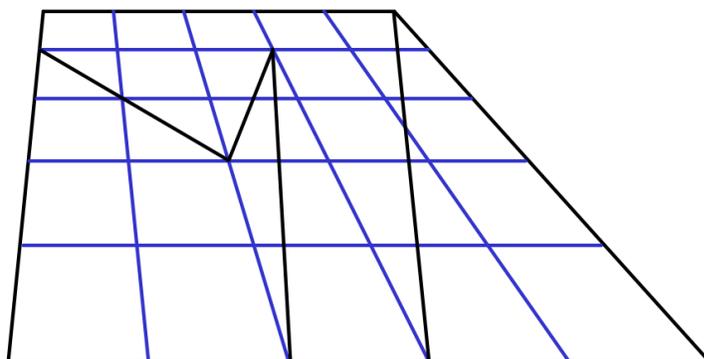


מצאו את השטח של האזור השחור.

תשובה: 325

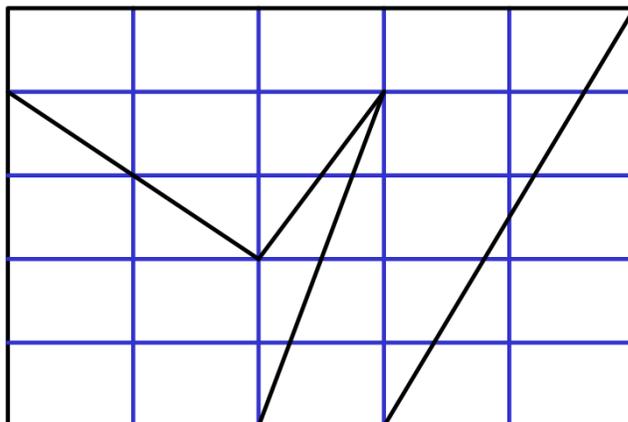
פתרון:

נצייר את הצורה עם המשבצות, ונעתיק אותה לדף המקורי:

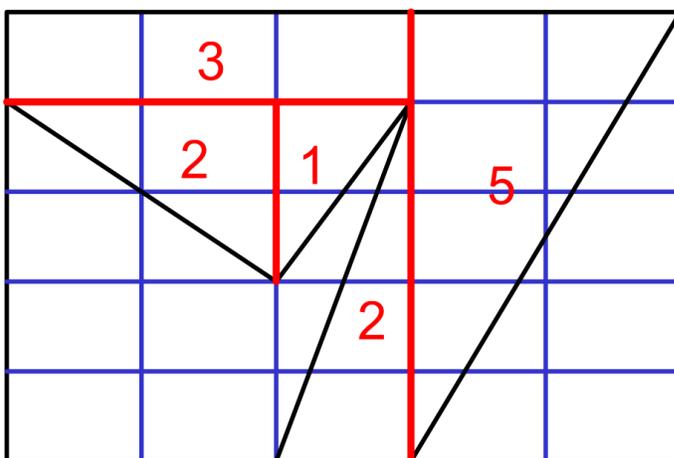




האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ו'-ז'
שלב ב, שנת תשפ"ו



נחלק אותה למשולשים ומלבנים, ולכל אחד נחשב שטח (שטח משולש הוא חצי כפול גובה כפול בסיס. יותר קל לחשב את השטח כאשר משבצת = יחידת שטח אחת, אז נעשה ככה:



השטח הכולל הוא 13 משבצות. שטח כל משבצת הוא $25 = \frac{625}{5^2}$ ולכן השטח של הצורה השחורה הוא $325 = 13 \cdot 25$.

בהצלחה!