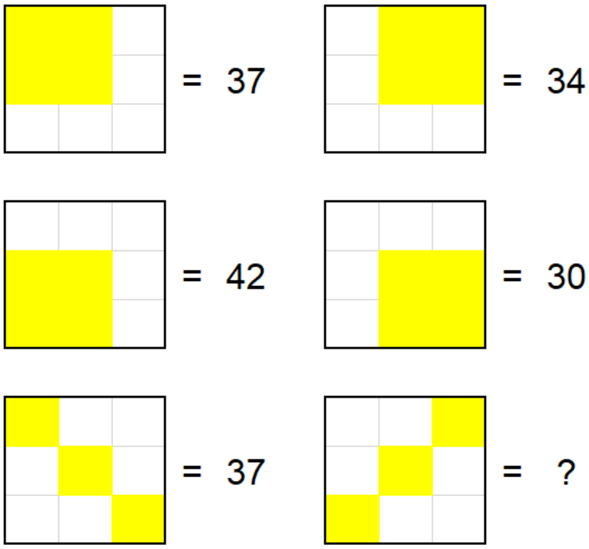
# האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ח'-ט'
## שלב ב, שנת תשפ"ו

1. לנבו יש טבלה בגודל $3 \times 3$ משבצות. בכל משבצת הוא רשם מספר. נתונים סכומים של רביעיות המספרים בכל אחד מריבועים $2 \times 2$, ונתון סכום המספרים באחד האלכסונים. **מצאו את סכום המספרים באלכסון השני.**

(סכום המספרים בריבוע $2 \times 2$ שמאלי עליון הוא 37, סכום המספרים בריבוע $2 \times 2$ ימני עליון הוא 34, סכום המספרים בריבוע $2 \times 2$ שמאלי תחתון הוא 42, סכום המספרים בריבוע $2 \times 2$ ימני תחתון הוא 30, וסכום שלושת המספרים באלכסון שהולך ימינה ולמטה הוא 37)

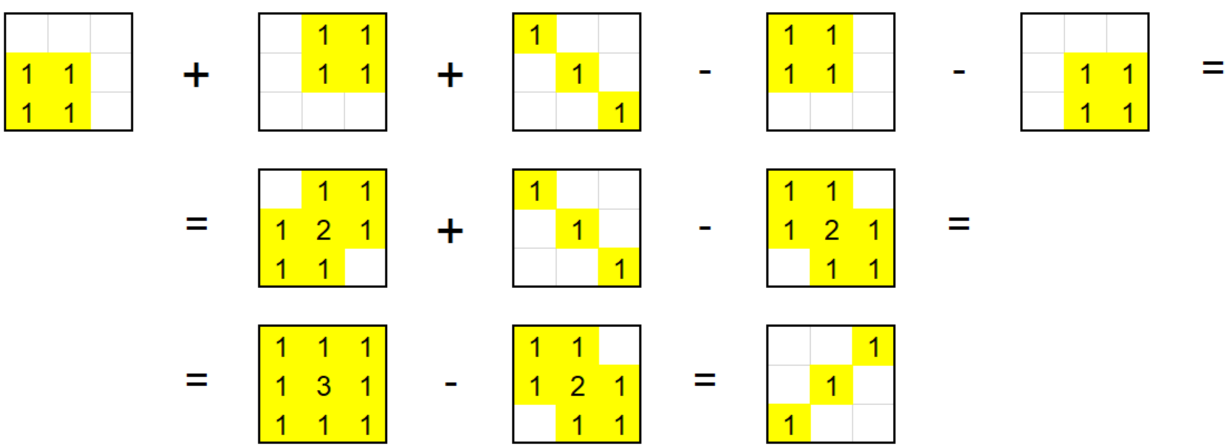



**תשובה:** 46

**פתרון:**

אפשר לקבל את האלכסון הרצוי כך:

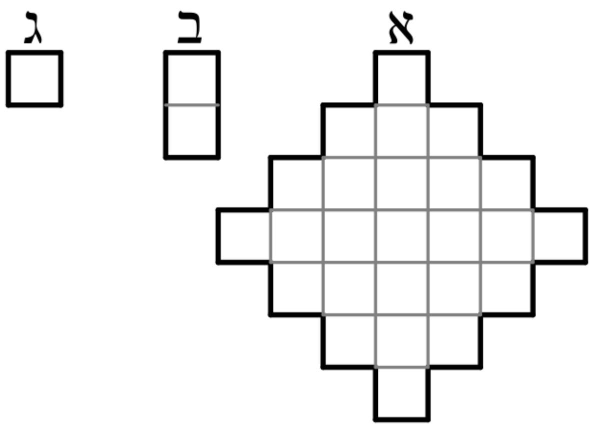
כדי לוודא, נסמן בכל משבצת כמה פעמים ספרנו אותה בסכום הכולל:



לכן התוצאה היא $34 + 42 + 37 - 37 - 30 = 46$

הערה: אי אפשר לגלות בוודאות את המספרים שבטבלה, אבל אפשר למצוא דוגמאות למספרים כאלה, למשל:

| | | |
|---|---|---|
| 37 | 0 | 34 |
| 0 | 0 | 0 |
| 12 | 30 | 0 |




2. לבני יש לוח משבצות $100 \times 100$. הוא מרצף אותו עם מרצפות בצורות המתוארות בציור: (א) צורת "יהלום" המורכבת מ-25 משבצות, (ב) צורת "דומינו" המורכבת משתי משבצות (מותר גם לסובב את הדומינו), ו-(ג) משבצת בודדת. הוא רוצה להשתמש ב-11 "יהלומים" בדיוק, בכמה שיותר "דומינו", וכמה שפחות משבצות בודדות. **מה הכמות הקטנה ביותר של משבצות בודדות בהן יצטרך בני להשתמש?**

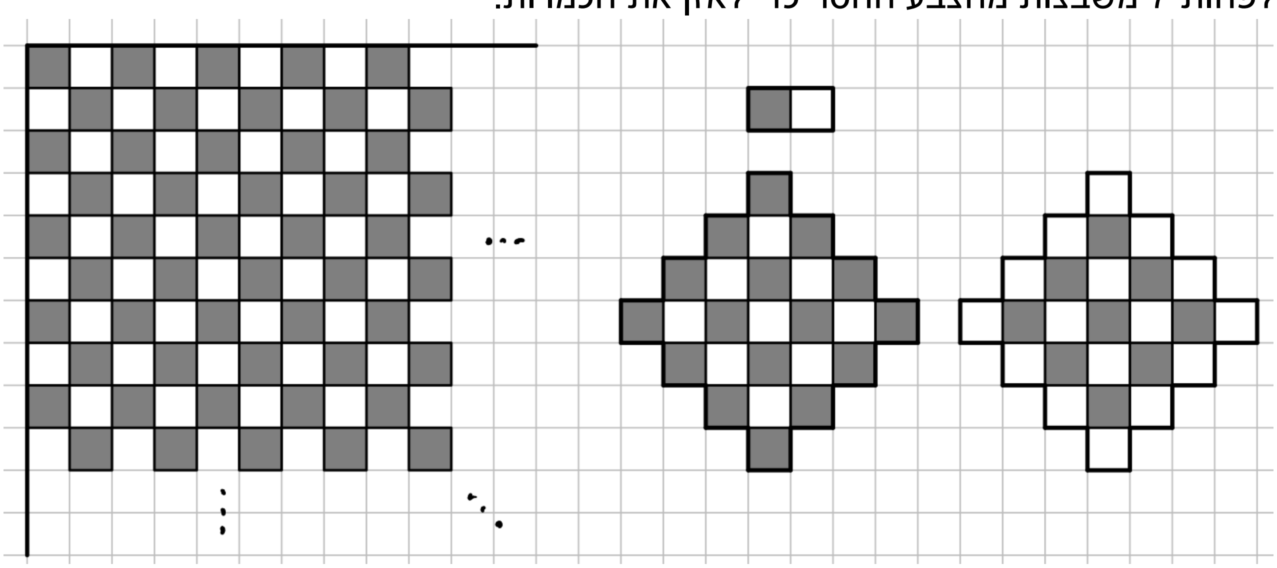
הערה: למרצפות אסור לעלות זו על זו, ואסור לצאת מגבולות הלוח. אסור לחתוך מרצפות לחלקים, וכל הלוח צריך להיות מלא.

**תשובה:** 7

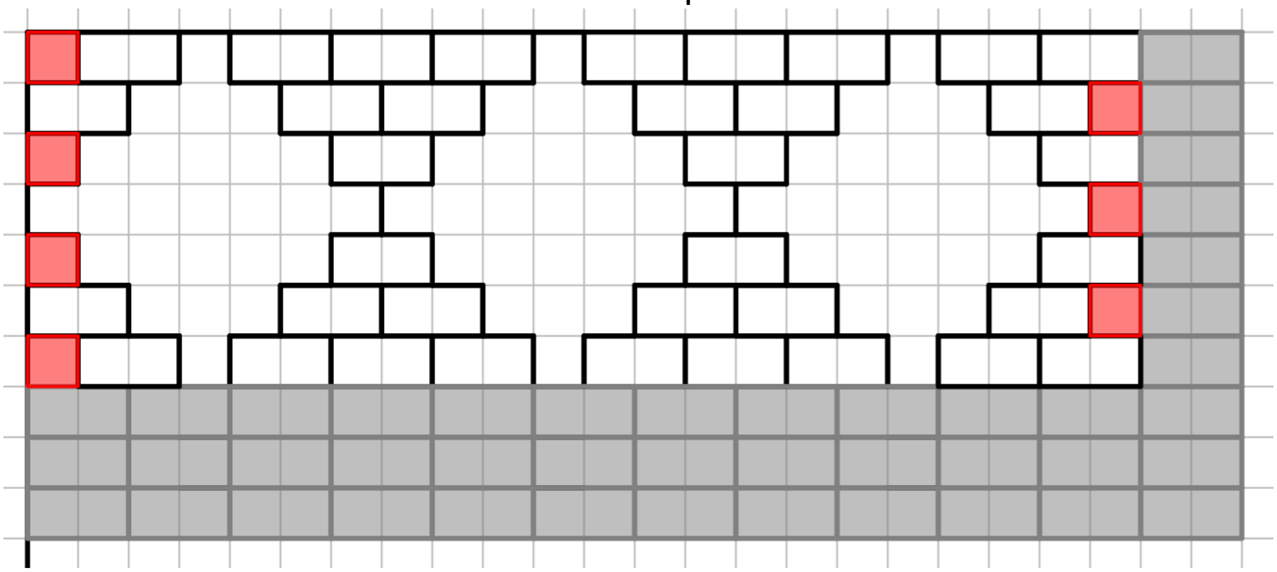
**פתרון:**

קודם כל נשים לב שאם נצבע את הלוח בצביעת שח – בלוח תהיה אותה כמות של משבצות שחורות ולבנות.

כל הדומינו מכסים אותה כמות של משבצות לבנות ושחורות (בכל דומינו משבצת לבנה ומשבצת שחורה), ובצורת יהלום 16 משבצות מצבע אחד ו-9 מצבע אחר. יש כמות אי-זוגית של יהלומים, לכן הם לא יכולים לאזן זה את זה לגמרי, וחייבים לפחות 7 משבצות מהצבע החסר כדי לאזן את הכמויות.



נביא גם דוגמה שמראה שאפשר להסתפק ב-7 משבצות בודדות:



בדוגמה 3 יהלומים בלוח 22 על 7, וכל השאר מרוצף על ידי דומינו אופקיים. אפשר לעשות אותו דבר עם 11 יהלומים, שיכנסו בלוח ברוחב $7 \cdot 11 + 1 = 78$ וזה קטן מ-100, לכן ייכנס בטבלה 100 על 100, וכל השאר יהיה מרוצף בדומינו אופקיים.

3. איילה כתבה במחשב מספר ארבע-ספרתי ושאלה את המחשב מה התכונות שלו.
המחשב ענה:

- כל הספרות במספר זהות
- המספר מתחלק ב-4
- המספר לא מתחלק ב-9
- ההפרש בין הספרה הכי גדולה והספרה הכי קטנה הוא 3 או פחות
- הספרה הכי שמאלית קטנה מהספרה הכי ימנית

מסתבר שכל המשפטים היו לא נכונים, ואיילה ביקשה מהמחשב לתקן אותם והפעם לתת תכונות נכונות. הפעם המחשב כתב:

- כל הספרות במספר שונות
- המספר מתחלק ב-5
- המספר לא מתחלק ב-11
- ההפרש בין הספרה הכי גדולה והספרה הכי קטנה הוא 7 או יותר
- הספרה הכי שמאלית גדולה מהספרה הכי ימנית

מסתבר שגם כל המשפטים האלה היו לא נכונים. **מה היה המספר של איילה?**

**תשובה:** 7227

**פתרון:**

נתון כי כל המשפטים לא נכונים. נרשום את השלילה שלהם (כלומר את המשפטים הנכונים המתאימים להם):

- לא כל הספרות במספר זהות
- המספר לא מתחלק ב-4
- המספר מתחלק ב-9
- ההפרש בין הספרה הכי גדולה והספרה הכי קטנה גדול מ-3
- הספרה הכי שמאלית לא קטנה מהספרה הכי ימנית
- לא כל הספרות במספר שונות
- המספר לא מתחלק ב-5
- המספר מתחלק ב-11
- ההפרש בין הספרה הכי גדולה והספרה הכי קטנה קטן מ-7
- הספרה הכי שמאלית לא גדולה מהספרה הכי ימנית

נסמן את המספר ב-$ABCD$.

המספר מתחלק גם ב-11 וגם ב-9, לכן הוא מתחלק ב-99. נכתוב את המספר כך:

$$ABCD = AB \cdot 100 + CD = AB \cdot 99 + AB + CD$$

אז כדי ש-$ABCD$ יתחלק ב-99 צריך ש-$AB + CD$ יתחלק ב-99. זה אומר ש-

$$AB + CD = 99$$

או ש-$AB = CD = 99$. המקרה הזה לא אפשרי כי אז כל הספרות זהות.

לכן $AB + CD = 99$, ולכן $A + C = 9$, $B + D = 9$.

מנתונים הספרה הכי שמאלית לא קטנה ולא גדולה מהספרי הכי ימנית, ולכן הן שוות: $A = D$, וקיבלנו שהמספר הוא $ABBA$ כאשר $A + B = 9$.

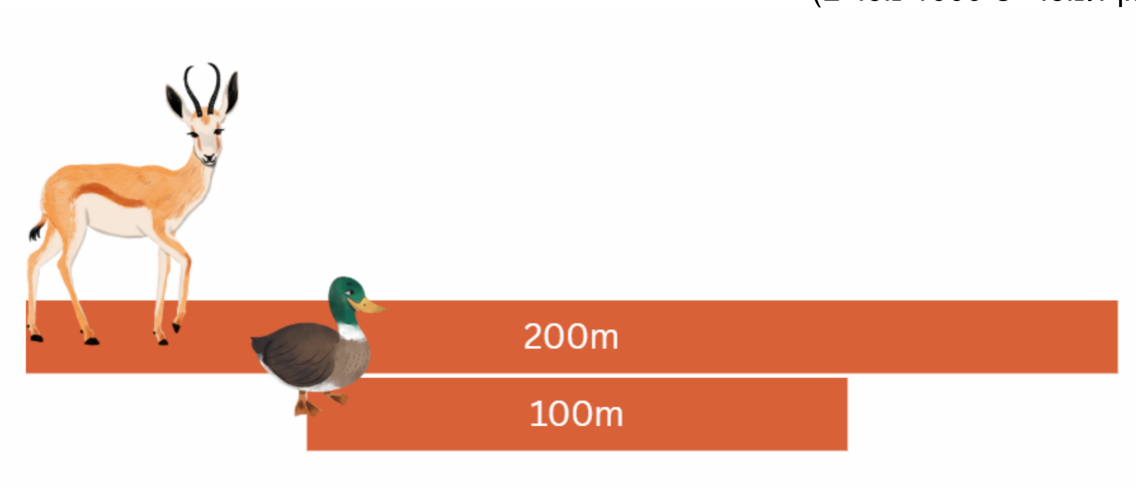
ההפרש בין הספרה הגדולה לקטנה קטן מ-7 וגדול מ-3, כלומר

$$3 < |A - B| < 7$$

אך בגלל ש-$A + B = 9$ ההפרש הזה יהיה אי-זוגי, ולכן $|A - B| = 5$. לכן האפשרויות היחידות הן 7227 ו-2772, אך 2772 מתחלק ב-4, לכן האפשרות היחידה היא 7227.

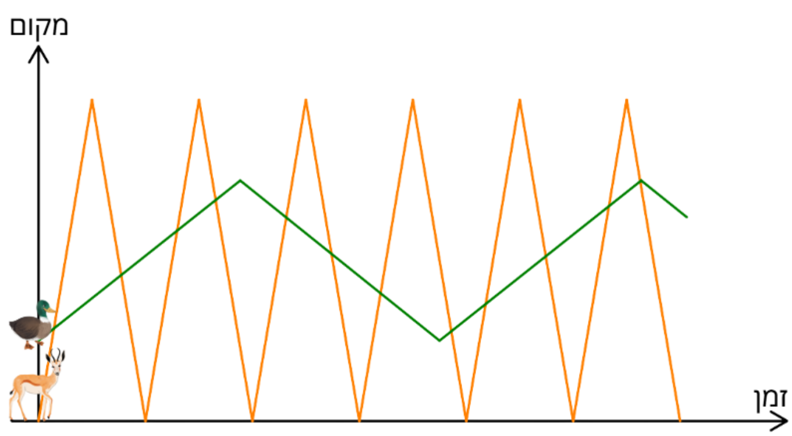
4. איילה וברווז רצים ריצת בוקר שלהם. איילה מתחילה בקצה של מסלול שאורכו 200 מטר, ורצה מקצה לקצה ובחזרה, במהירות קבועה של 19 קילומטר לשעה. ברווז רץ במסלול שאורכו 100 מטר, שנמצא בדיוק באמצע של מסלול בו רצה איילה, כמו שמתואר בציור. גם הוא רץ מקצה לקצה ובחזרה, במהירות קבועה של 5 קילומטר לשעה. שניהם מתחילים באותו הזמן בקצה הדרומי של המסלולים, ומסיימים בדיוק שעה אחת אחרי ההתחלה. **כמה פעמים איילה וברווז נפגשו במהלך השעה הזאת?**

(בקילומטר יש 1000 מטרים)




**תשובה:** 95

**פתרון:** בכל פעם שאיילה רצה מקצה אחד לקצה שני היא פוגשת את הברווז בדיוק פעם אחד. זה כי היא בטוח עוברת אותו, לא משנה לאיזה כיוון הוא רץ, וגם הברווז רץ לאט יותר ולא יוכל להשיג את איילה בפעם השנייה. אז כמות הפגישות שווה לכמות הפעמים שאיילה רצה מקצה לקצה של המסלול בשעה אחת. איילה עושה 19000 מטרים בשעה, כלומר $\frac{19000}{200} = 95$ מסלולים בשעה. לכן היא תפגוש את ברווז 95 פעמים בדיוק. בתמונה: התחלה של גרף התנועה שלהם.




הערה: אם מסלול של ברווז היה מתחיל או מסתיים בקצה של מסלול של איילה – שני מפגשים היו יכולים להתלכד למפגש אחד בקצה המסלול, והיה צריך להתחשב בזה בחישוב.

5. בתרגיל כפל הבא ספרות זהות הוחלפו באותיות זהות, וספרות שונות – באותיות שונות:

$$ABBABBA \times CDE = EEEEEEEEE$$

**מצאו את המספר $ABCDE$, אם ידוע שהוא לא מתחלק ב-5.**

**תשובה:** 60148

**פתרון:**

מכפילים מספר שנגמר ב-$A$ במספר שנגמר ב-$E$ והתוצאה נגמרת ב-$E$. אם $E$ הוא לא 5 ולא 0 אז $A$ חייב להיות 1 או 6.

נשים לב כי

$$EEEEEEEEE = 1001001 \cdot 111 \cdot E$$
$$1001001 = 3 \cdot 333667, 111 = 3 \cdot 37$$

וכי

$$ABBABBA = 1001001 \cdot A + 110110 \cdot B$$
$$110110 = 1001 \cdot 11 \cdot 10 = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 5$$

נכתוב:

$$ABBABBA \times CDE = 3 \cdot 333667 \cdot 111 \cdot E$$

המספר 333667 ראשוני, אז אין לו ול-$CDE$ מחלקים משותפים, ולכן $ABBABBA$ מתחלק בו. $A00A00A$ מתחלק ב-333667, אז גם $BB0BB0$ חייב להתחלק בו, וזה אפשרי רק כאשר $B = 0$.

עכשיו אם $A = 1$ נקבל $1001001 \times CDE = 1001001 \times EEE$ וזה לא אפשרי, לכן $A = 6$. קיבלנו:

$$6006006 \times CDE = 1001001 \times EEE$$

נצמצם את מה שאפשר:

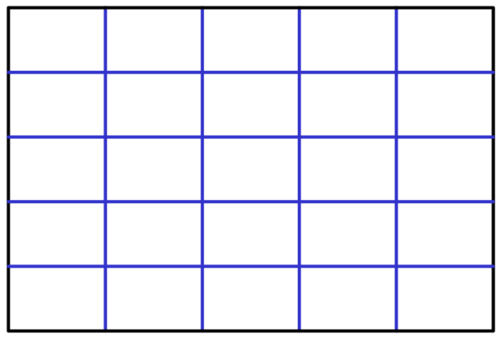
$$6 \times CDE = 111 \times E$$
$$2 \times CDE = 37 \times E$$

מכאן $E$ זוגי, ו-$37 \times E > 200$. אם $E = 6$ אז $CDE = 111$ וזה לא חוקי, אז רק $E = 8$ עובד ומקבלים $CDE = 148$.

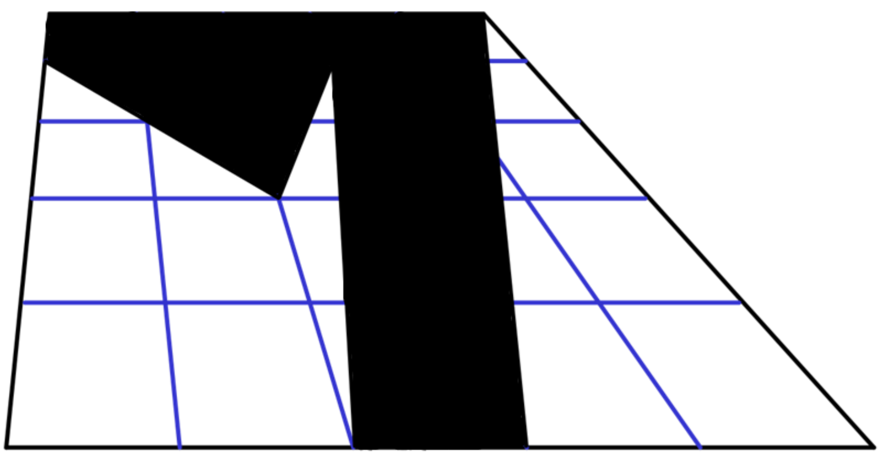
סה"כ

$$ABCDE = 60148$$

6. לאיליה היה דף מלבני, ששטחו 625, והוא חילק אותו עם קווים אופקיים ואנכיים ל- $5 \times 5$ משבצות מלבניות חופפות כך:



לאחר מכן הוא צבע בשחור מצולע על הדף (קודקודי מצולע היו בקודקודי משבצות), שם את הדף על השולחן, וצילם אותו מהצד. התמונה שיצאה לו נראתה כך:

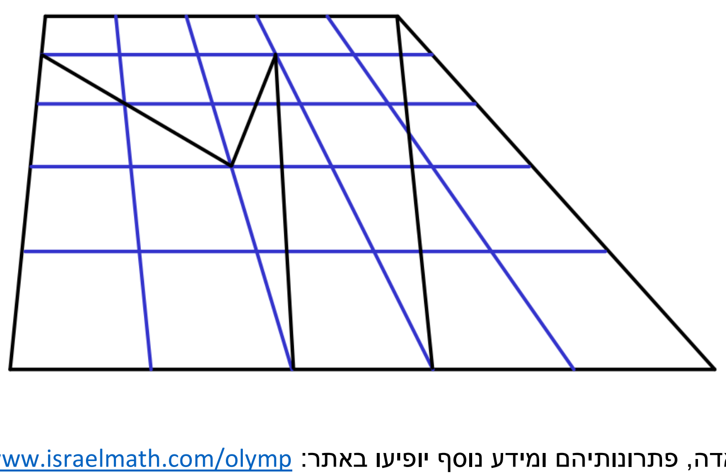


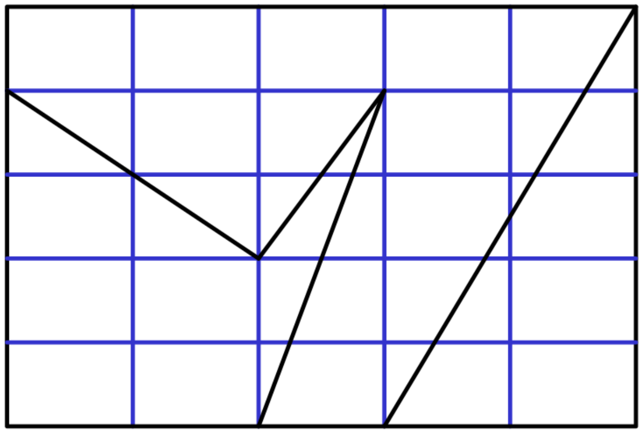
**מצאו את השטח של האזור השחור.**

**תשובה:** 325

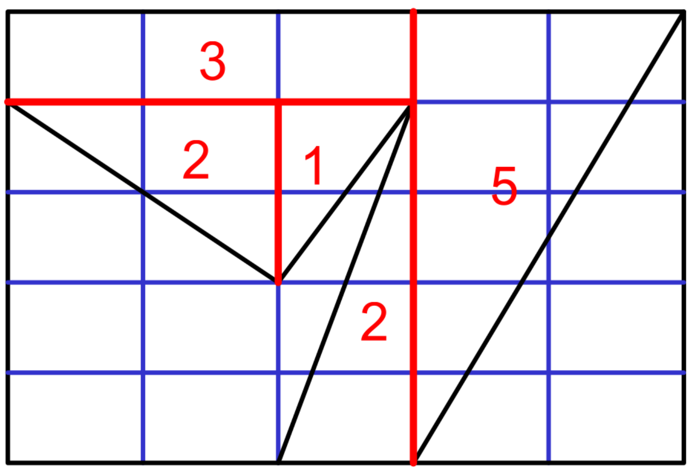
**פתרון:**

נצייר את הצורה עם המשבצות, ונעתיק אותה לדף המקורי:





נחלק אותה למשולשים ומלבנים, ולכל אחד נחשב שטח (שטח משולש הוא חצי כפול גובה כפול בסיס. יותר קל לחשב את השטח כאשר משבצת = יחידת שטח אחת, אז נעשה ככה:




השטח הכולל הוא 13 משבצות. שטח כל משבצת הוא $\frac{625}{5^2} = 25$ ולכן השטח של הצורה השחורה הוא $13 \cdot 25 = 325$.

## בהצלחה!