



## האולימפיאדה הארצית במתמטיקה

### כיתות ד'-ה'

#### שלב הגמר, שנת תשפ"ו

משך התחרות – 3 שעות. אסור להשתמש במחשבון או בכל מה שמכיל מחשבון. יש לכבות את כל הטלפונים.

יש לכתוב בעט, רק על הדפים הריקים שיחולקו על ידי המשגיחים, בצד אחד בלבד.

ניתן לפנות למשגיחים עם כל שאלה. קבלת עזרה מכל אחד אחר **אסורה בהחלט**.

שימו לב – בתחרות 6 שאלות. גם פתרונות חלקיים יכולים לתת חלק מנקודות על שאלה.

1. לאיליה יש מאזניים שמראים משקל מדויק של מה ששוקלים עליהם. לאיליה יש 8 תפוחים: 7 מתוכם אמיתיים, כולם שוקלים אותו משקל, ותפוח פלסטיק אחד ששוקל פחות מתפוח אמיתי. איליה שקל את כל 8 התפוחים ביחד ורשם את התוצאה, ואז שקל 5 תפוחים ורשם את התוצאה (לא ידוע אם אחד מהם עשוי מפלסטיק). האם אפשר לדעת בוודאות את המשקל של תפוח אמיתי לפי תוצאות של שתי השקילות האלה? אם כן – הסבירו כיצד ניתן לעשות זאת, ואם לא – הסבירו מדוע זה בלתי אפשרי.

#### תשובה: כן

#### פתרון 1:

אם נחלק את המשקל של 8 התפוחים ב-8, נקבל את המשקל הממוצע של התפוחים, והוא גדול ממשקל של תפוח פלסטיק, וקטן ממשקל של תפוח אמיתי. אם כל 5 התפוחים שנשקלו בשקילה השנייה אמיתיים – המשקל הממוצע שלהם (משקל כולל חלקי 5) יהיה שווה למשקל התפוח האמיתי, וגדול ממשקל הממוצע של 8 התפוחים. אחרת משקל ממוצע של 3 התפוחים הנותרים יהיה שווה למשקל של תפוח אמיתי, וגדול ממשקל ממוצע של 8 התפוחים.

רק אחד מהמקרים האלה יכול להתקיים, כי ממשקל ממוצע של 8 התפוחים הוא בין משקל ממוצע של 5 התפוחים ומשקל ממוצע של 3 התפוחים הנותרים. כך אנחנו מגלים בוודאות את המשקל של התפוח האמיתי.

#### פתרון 2:

נסמן את משקלי התפוחים באותיות:  $A$  יהיה משקל התפוח האמיתי, ו- $B$  יהיה משקל של תפוח פלסטיק. ידוע כי  $A > B$ .

תוצאה של השקילה ראשונה היא  $7 \cdot A + B$

ותוצאה של השקילה השנייה היא  $5 \cdot A$  או  $4 \cdot A + B$

אם נכפיל את התוצאה השנייה ב-8 ואת הראשונה ב-5 נקבל:

$35 \cdot A + 5 \cdot B$  מתוצאה ראשונה, ו- $40 \cdot A$  או  $32 \cdot A + 8 \cdot B$  בתוצאה השנייה.

בגלל ש- $32 \cdot A + 8 \cdot B < 35 \cdot A + 5 \cdot B < 40 \cdot A$ , אז ככה נוכל לדעת האם

תפוח פלסטיק הוא אחד מ-5 התפוחים שנשקלו בשקילה השנייה.

עכשיו במקרה שכל 5 התפוחים אמיתיים – נחלק  $5 \cdot A$  ב-5 ונגלה את  $A$ .

ובמקרה הו תפוח פלסטיק הוא אחד מ-5 התפוחים שנשקלו – נחסיר את

$4 \cdot A + B$  מ- $7 \cdot A + B$  ונקבל  $3 \cdot A$ , נחלק את זה ב-3 ונקבל את  $A$ .



## האולימפיאדה הארצית במתמטיקה

### כיתות ד'-ה'

#### שלב הגמר, שנת תשפ"ו

משך התחרות – 3 שעות. אסור להשתמש במחשבון או בכל מה שמכיל מחשבון. יש לכבות את כל הטלפונים. יש לכתוב בעט, רק על הדפים הריקים שיחולקו על ידי המשגיחים, בצד אחד בלבד. ניתן לפנות למשגיחים עם כל שאלה. קבלת עזרה מכל אחד אחר **אסורה בהחלט**. שימו לב – בתחרות 6 שאלות. גם פתרונות חלקיים יכולים לתת חלק מנקודות על שאלה.

2. נבו רשם במחברת שלו 4 מספרים שלמים חיוביים. הוא רשם את כל 6 תרגילי החיבור שאפשר לקבל מחיבור של שניים מהמספרים האלה, ואת כל 4 תרגילי החיבור שאפשר לקבל מחיבור של שלושה מהמספרים האלה. את כל 10 התוצאות הוא רשם בדף נפרד, בסדר עולה. אלה 10 התוצאות שהוא קיבל:

$$9, 23, 28, 30, 82, 87, 89, 101, 103, 108$$

מצאו את ארבעת המספרים המקוריים.

**תשובה:**

2,7,21,80

**פתרון:**

נסמן את המספרים באותיות:  $a \leq b \leq c \leq d$ . אז הסכום הכי קטן הוא הסכום של 2 המספרים הכי קטנים, כלומר  $a + b = 9$ . הסכום השני הכי קטן הוא הסכום של המספר הכי קטן והמספר השלישי:  $a + c = 23$ . הסכום הכי גדול הוא הסכום של 3 המספרים הכי גדולים:  $b + c + d = 108$ , והסכום השני הכי גדול הוא  $a + c + d = 103$ .  
לכן  $d = a + c + d - (a + c) = 103 - 23 = 80$ . יש 4 מספרים שקטנים מ-80, לכן הם חייבים להיות הסכומים שלא מכילים את  $d$ :

$$a + b = 9, a + c = 23, b + c = 28, a + b + c = 30$$

לכן אם מחסיר את 9,23,28 מ-30 – נקבל את  $c, b, a$ :

$$c = 30 - 9 = 21, b = 30 - 23 = 7, a = 30 - 28 = 2$$

נבדוק, וזה באמת המספרים: 2,7,21,80.



## האולימפיאדה הארצית במתמטיקה

### כיתות ד'-ה'

#### שלב הגמר, שנת תשפ"ו

משך התחרות – 3 שעות. אסור להשתמש במחשבון או בכל מה שמכיל מחשבון. יש לכבות את כל הטלפונים.

יש לכתוב בעט, רק על הדפים הריקים שיחולקו על ידי המשגיחים, בצד אחד בלבד.

ניתן לפנות למשגיחים עם כל שאלה. קבלת עזרה מכל אחד אחר **אסורה בהחלט**.

שימו לב – בתחרות 6 שאלות. גם פתרונות חלקיים יכולים לתת חלק מנקודות על שאלה.

3. תחליפו אותיות בספרות 1, 2 או 3 כך שיתקבל שוויון נכון:

$$A + B \times (C + D \times (E + F \times (G + H))) = 190$$

למשל אפשר להחליף ככה

$$1 + 1 \times (1 + 1 \times (1 + 2 \times (2 + 3)))$$

אבל אז במקום 190 נקבל 13.

#### תשובה:

$$1 + 3 \times (3 + 3 \times (2 + 3 \times (3 + 3))) = 190$$

#### פתרון:

כדי לקבל מספר גדול כמו 190 ננחש ש- $B = D = F = 3$ . עכשיו נמצא את

$A, C, E, G, H$  בהתאם:

$$A + 3 \times (\dots) = 190$$

האפשרות היחידה היא  $A = 1$ , אחרת  $190 - A$  לא מתחלק ב-3.

$$3 \times (C + 3 \times (E + 3 \times (G + H))) = 189$$

$$C + 3 \times (E + 3 \times (G + H)) = 63$$

מכאן  $C = 3$  ומקבלים

$$3 \times (E + 3 \times (G + H)) = 60$$

$$E + 3 \times (G + H) = 20$$

מכאן  $E = 2$  ונשאר

$$3 \times (G + H) = 18$$

$$G + H = 6$$

$$G = H = 3$$

כלומר קיבלנו

$$1 + 3 \times (3 + 3 \times (2 + 3 \times (3 + 3))) = 190$$

הערה:

בשאלה הזאת תשובה בלבד זה מספיק.



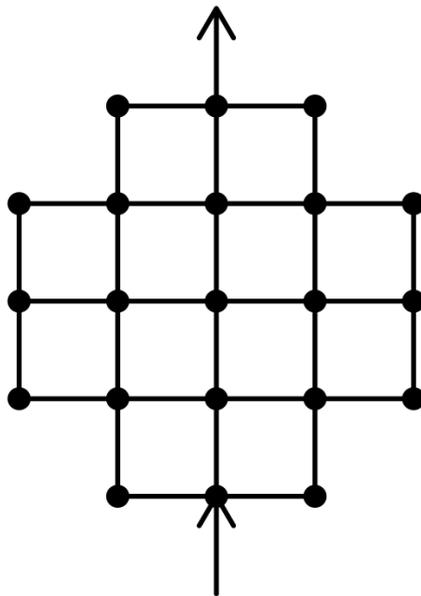
## האולימפיאדה הארצית במתמטיקה

### כיתות ד'-ה'

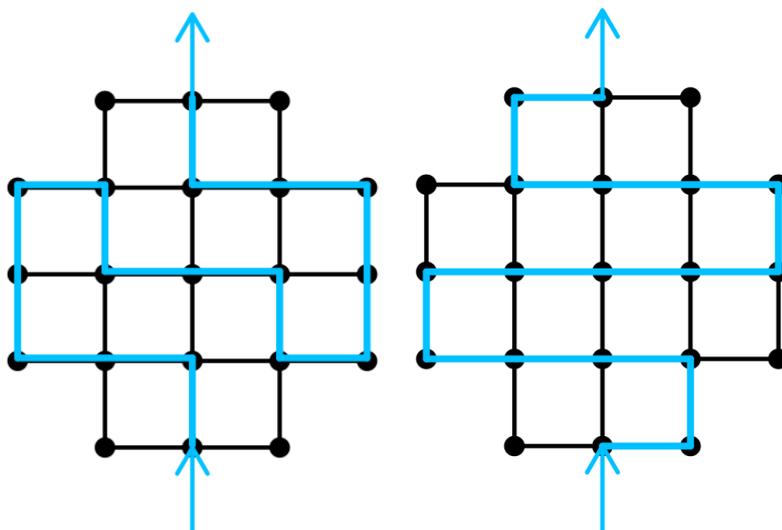
#### שלב הגמר, שנת תשפ"ו

משך התחרות – 3 שעות. אסור להשתמש במחשבון או בכל מה שמכיל מחשבון. יש לכבות את כל הטלפונים. יש לכתוב בעט, רק על הדפים הריקים שיחולקו על ידי המשגיחים, בצד אחד בלבד. ניתן לפנות למשגיחים עם כל שאלה. קבלת עזרה מכל אחד אחר **אסורה בהחלט**. שימו לב – בתחרות 6 שאלות. גם פתרונות חלקיים יכולים לתת חלק מנקודות על שאלה.

4. בציור הבא 21 נקודות מסומנות, וקווים שמחברים בינם. אורך של כל קו שמחבר שתי נקודות סמוכות הוא 1. מצאו מסלול ארוך ביותר שעובר על הקווים שבציור, מתחיל ומסתיים במקומות המסומנים, ולא עובר באותה נקודה פעמיים. הוכיחו כי לא קיים מסלול יותר ארוך. (אסור לעבור בנקודה מסומנת עוד פעם אם כבר עברנו בה)



#### תשובות אפשריות:



יש עוד הרבה פתרונות, בכל פתרון נכון לא מגיעים ל-4 מתוך הנקודות המסומנות.



## האולימפיאדה הארצית במתמטיקה

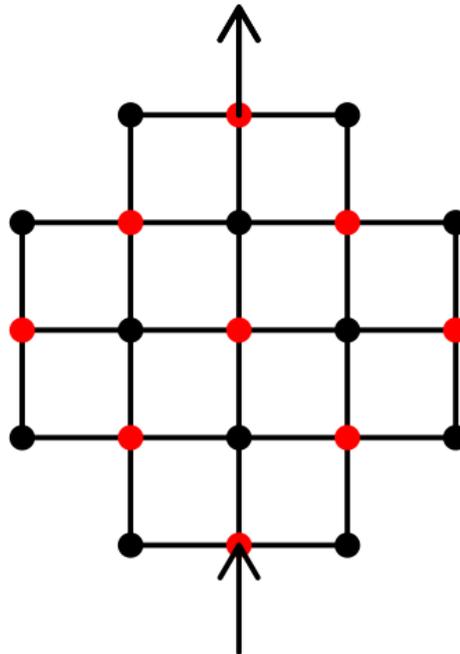
### כיתות ד'-ה'

#### שלב הגמר, שנת תשפ"ו

משך התחרות – 3 שעות. אסור להשתמש במחשבון או בכל מה שמכיל מחשבון. יש לכבות את כל הטלפונים. יש לכתוב בעט, רק על הדפים הריקים שיחולקו על ידי המשגיחים, בצד אחד בלבד. ניתן לפנות למשגיחים עם כל שאלה. קבלת עזרה מכל אחד אחר **אסורה בהחלט**. שימו לב – בתחרות 6 שאלות. גם פתרונות חלקיים יכולים לתת חלק מנקודות על שאלה.

#### **פתרון:**

נצבע את הנקודות כך:



המסלול עובר מנקודות אדומות רק לנקודות שחורות, ומנקודות שחורות רק לנקודות אדומות. יש רק 9 נקודות אדומות, ו-12 נקודות שחורות. מתחילים ומסיימים בנקודה אדומה, אז בין 9 הנקודות האדומות יכולות להיות רק 8 נקודות שחורות, וזה משאיר 4 נקודות שחורות שלא נוכל לעבור בהן.





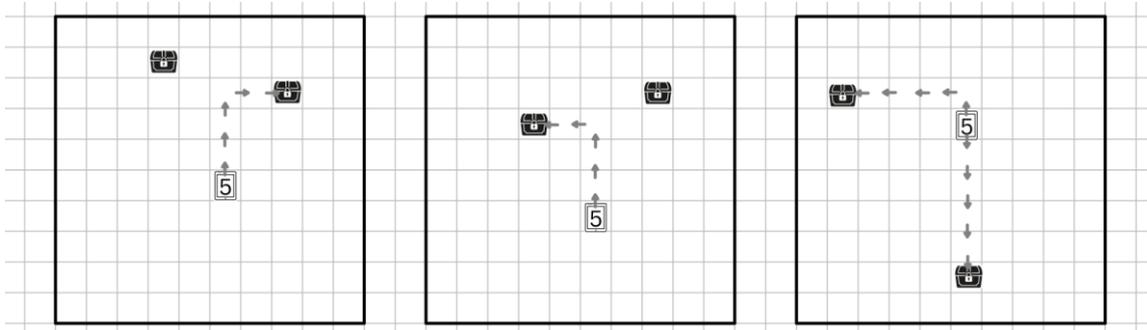
## האולימפיאדה הארצית במתמטיקה

### כיתות ד'-ה'

#### שלב הגמר, שנת תשפ"ו

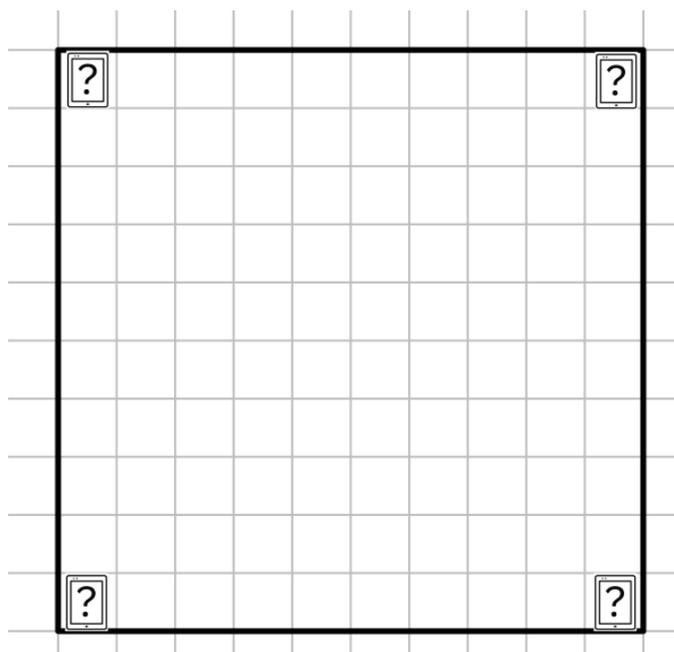
משך התחרות – 3 שעות. אסור להשתמש במחשבון או בכל מה שמכיל מחשבון. יש לכבות את כל הטלפונים. יש לכתוב בעט, רק על הדפים הריקים שיחולקו על ידי המשגיחים, בצד אחד בלבד. ניתן לפנות למשגיחים עם כל שאלה. קבלת עזרה מכל אחד אחר **אסורה בהחלט**. שימו לב – בתחרות 6 שאלות. גם פתרונות חלקיים יכולים לתת חלק מנקודות על שאלה.

6. למריה יש שדה בגודל  $10 \times 10$ . בשתיים מהמשבצות כבור מטמון. למריה יש מכשיר שמראה כמה משבצות צריך לעבור בשביל להגיע למטמון הכי קרוב, אם עוברים רק ממשבצת למשבצת סמוכה. כאשר מפעילים אותו ממשבצת של המטמון הוא מראה 0. מותר להפעיל את המכשיר לא יותר מ-5 פעמים. הסבירו מאילו משבצות צריך להפעיל את המכשיר כדי לגלות איפה נמצאים שני המטמונים. (מותר להחליט מאיפה מפעילים את המכשיר על סמך תוצאות מדידות קודמות, מותר להפעיל אותו מכל משבצת שרוצים) בתמונות: המכשיר מראה 5 בכל הדוגמאות הבאות.



#### פתרון:

ב-4 בדיקות ראשונות נמדוד את המרחקים מ-4 הפינות של הריבוע עד למטמון הכי קרוב אליהם:





## האולימפיאדה הארצית במתמטיקה

### כיתות ד'-ה'

#### שלב הגמר, שנת תשפ"ו

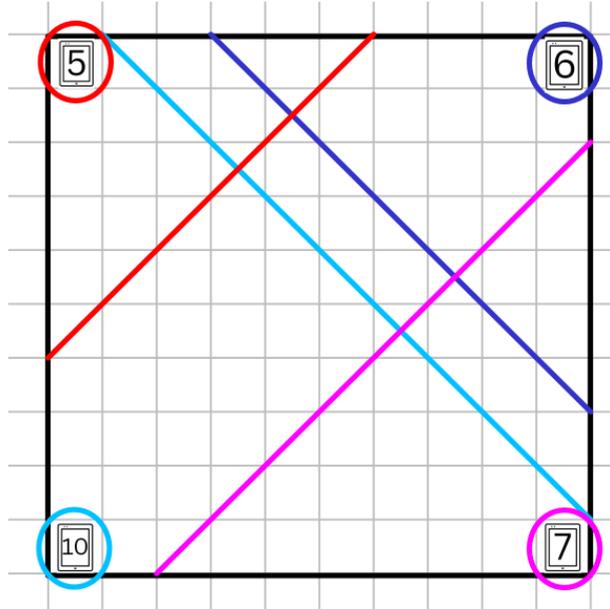
משך התחרות – 3 שעות. אסור להשתמש במחשבון או בכל מה שמכיל מחשבון. יש לבנות את כל הטלפונים.

יש לכתוב בעט, רק על הדפים הריקים שיחולקו על ידי המשגיחים, בצד אחד בלבד.

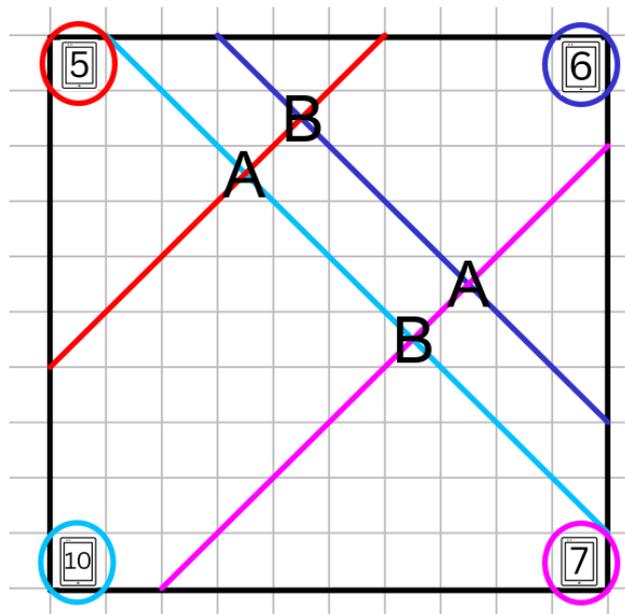
ניתן לפנות למשגיחים עם כל שאלה. קבלת עזרה מכל אחד אחר **אסורה בהחלט**.

שימו לב – בתחרות 6 שאלות. גם פתרונות חלקיים יכולים לתת חלק מנקודות על שאלה.

מכל אחת מהפינות נדע אלכסון עליו אמור להיות המטמון. למשל כך:



כל מטמון נמצא רק על אחד משני קווים מקבילים, ויש 2 מטמונים ו-4 קווים, אז כל מטמון חייב להיות על מפגש של שני קווים. יכול לצאת שיש פחות מ-4 מפגשים במשבצות השדה, במקרה זה מצאנו את המטמונים. יכול להיות ששני קווים מתלכדים, גם מקרה הזה המטמונים יהיו במפגשים של קווים. אבל המקרה שיש 4 מפגשים של קווים ו-2 מטמונים יש לנו שתי אפשרויות, זוג מטמונים על נקודות מסומנות ב-A, או זוג מטמונים על נקודות המסומנות ב-B:





## האולימפיאדה הארצית במתמטיקה

### כיתות ד'-ה'

#### שלב הגמר, שנת תשפ"ו

משך התחרות – 3 שעות. אסור להשתמש במחשבון או בכל מה שמכיל מחשבון. יש לכבות את כל הטלפונים.

יש לכתוב בעט, רק על הדפים הריקים שיחולקו על ידי המשגיחים, בצד אחד בלבד.

ניתן לפנות למשגיחים עם כל שאלה. קבלת עזרה מכל אחד אחר **אסורה בהחלט**.

שימו לב – בתחרות 6 שאלות. גם פתרונות חלקיים יכולים לתת חלק מנקודות על שאלה.

במקרה כזה נעמוד על אחת המשבצות המסומנות ב-A ונפעיל את המכשיר בפעם

החמישית. אם המכשיר ייתן תשובה 0 אז המטמונים בנקודות A, ואם לא 0, אז

המטמונים בנקודות B.

## **בהצלחה!**