<u>האולימפיאדה הארצית במתמטיקה</u>
<u>כיתות ו'-ז'</u>
שלב הגמר, שנת תשפ"ו

משך התחרות – 3 שעות. אסור להשתמש במחשבון או בכל מה שמכיל מחשבון. יש **לכבות** את כל הטלפונים.
יש לכתוב **בעט**, רק על הדפים הריקים שיחולקו על ידי המשגיחים, בצד אחד בלבד.
ניתן לפנות למשגיחים עם כל שאלה. קבלת עזרה מכל אחד אחר **אסורה בהחלט**.
שימו לב – בתחרות 6 שאלות. גם פתרונות חלקיים יכולים לתת חלק מנקודות על שאלה.

1. לאיליה יש מאזניים שמראים משקל מדויק של מה ששוקלים עליהם. לאיליה יש 6 תפוחים: מתוכם 4 אמיתיים, כולם שוקלים אותו משקל, תפוח פלסטיק אחד ששוקל פחות מתפוח אמיתי, ותפוח מתכתי שמשקלו גדול ממשקל שני תפוחים אמיתיים. כיצד ניתן לגלות את המשקלים של שלושת סוגי התפוחים באמצעות 4 שקילות על המאזניים? (כששוקלים את התפוחים לא יודעים ממה הם עשויים)

פתרון:

נסמן את התפוחים ב-a, b, c, d, e, f. קודם כל השקול את הזוגות

$$a + b, c + d, e + f$$

עכשיו יש כמה מקרים:

מקרה 1:

אם יש 2 זוגות עם משקלים שווים , למשל $c + d = e + f$, אז יש בהם רק תפוחים אמיתיים (כלומר בדוגמה שלנו c, d, e, f כולם אמיתיים). ככה גם מגלים את המשקל של התפוח האמיתי (מחלקים משקל של $c + d$ ב-2). אז נשקול את a. אנחנו יודעים את $a + b$ ואת a, אז מחסירים את a ומקבלים את המשקל של b. מתוך a, b התפוח הכבד יותר חייב להיות מתכתי, והקל – תפוח מפלסטיק.

מקרה 2:

אם לכל שלושת הזוגות משקלים שונים אפילו לא נצטרך שקילה שלישית: הזוג הכבד מכל תפוח מתכתי ותפוח אמיתי, הזוג הבינוני – שני תפוחים אמיתיים, והזוג הקל – תפוח פלסטיק ותפוח אמיתי. ממשקל של זוג תפוחים אמיתיים מגלים את המשקל של תפוח אמיתי, מחסירים אותו ממשקלים של זוגות אחרים ומגלים את המשקלים של תפוח מתכת ותפוח פלסטיק.

2. נבו רשם במחברת שלו 4 מספרים שלמים חיוביים. הוא רשם את כל 6 תרגילי החיבור שאפשר לקבל מחיבור של שניים מהמספרים האלה, ואת כל 4 תרגילי החיבור שאפשר לקבל מחיבור של שלושה מהמספרים האלה. את כל 10 התוצאות הוא רשם בדף נפרד, בסדר עולה. אלה 10 התוצאות שהוא קיבל:

$$9, 23, 28, 30, 82, 87, 89, 101, 103, 108$$

מצאו את ארבעת המספרים המקוריים.

תשובה:

$$2,7,21,80$$

פתרון:

נסמן את המספרים באותיות: $a \leq b \leq c \leq d$. אז הסכום הכי קטן הוא הסכום של 2 המספרים הכי קטנים, כלומר $a + b = 9$. הסכום השני הכי קטן הוא הסכום של המספר הכי קטן והמספר השלישי: $a + c = 23$. הסכום הכי גדול הוא הסכום של 3 המספרים הכי גדולים: $b + c + d = 108$, והסכום השני הכי גדול הוא $a + c + d = 103$.

לכן $d = a + c + d - (a + c) = 103 - 23 = 80$.

יש 4 מספרים שקטנים מ-80, לכן הם חייבים להיות הסכומים שלא מכילים את d:

$$a + b = 9, a + c = 23, b + c = 28, a + b + c = 30$$

לכן אם מחסיר את 9,23,28 מ-30 – נקבל את c, b, a:

$$c = 30 - 9 = 21, b = 30 - 23 = 7, a = 30 - 28 = 2$$

נבדוק, וזה באמת המספרים: 2,7,21,80.

3. בשוויון הבא ספרות זהות הוחלפו באותיות זהות, וספרות שונות – באותיות שונות. שחזרו את המספרים המקוריים (בשאלה זו אין צורך להוכיח):

$$\frac{A}{B}+\frac{B}{A}+\frac{B}{C}+\frac{C}{B}+\frac{A}{C}+\frac{C}{A}=AB$$

הערה: AB הוא המספר הדו-ספרתי AB, **ולא** מכפלה של A ו-B.

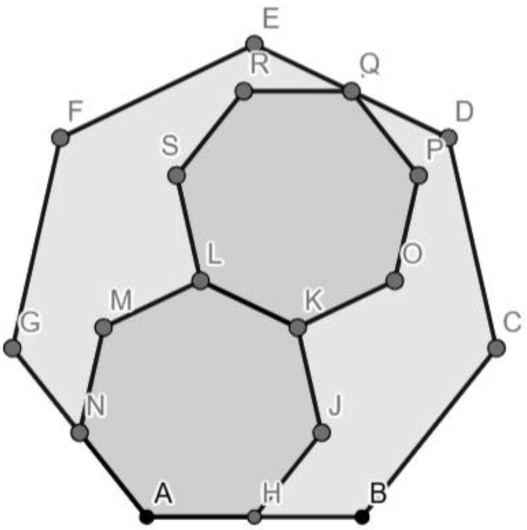
תשובה:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{1}+\frac{2}{6}+\frac{6}{2}+\frac{1}{6}+\frac{6}{1}=12$$

כלומר

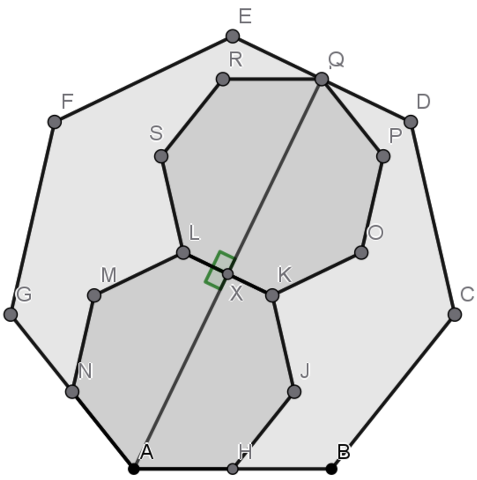
$$A=1, B=2, C=6$$

4. בציור הבא 3 משובעים משוכללים: $ABCDEFG, AHJKLMN, LKOPQRS$.
נתון כי N, H הם אמצעי קטעים AG, AB בהתאמה.
הוכיחו כי Q נמצא על קטע DE.



פתרון:

נעביר גובה מ-A ל-LK, וגובה מ-Q ל-LK. בגלל שמשובע משוכלל הוא סימטרי – הגבהים יעברו באמצע LK. נסמן את אמצע LK ב-X:



בגלל ש-AX ו-QX מאונכים ל-LK, הנקודות A, X, Q נמצאות על ישר אחד. בגלל ששני המשובעים הקטנים חופפים (כלומר בעלי אותה צורה ואותו גודל), וגם הצלעות שלהם פי 2 קטנות מצלעות של המשובע הגדול, אז גם הגבהים שלהם יהיו פי 2 יותר קצרים מגובה של המשובע הגדול. בגלל שכל הצלעות של $AHJKLMN$ באותם כיוונים כמו צלעות של $ABCDEFG$, גם הגבהים שלהם באותו הכיוון. AQ הוא בכיוון ובאורך של הגובה של $ABCDEFG$, ולכן AQ הו הגובה של $ABCDEFG$, בפרט Q נמצא על DE.

5. האם קיים מספר טבעי N עבורו למספרים $2026 + N$, $2026 \cdot N$ יש אותו סכום ספרות? (סכום ספרות הוא סכום של כל הספרות של המספר)

תשובה: לא קיים

פתרון:

שארית של מספר בחלוקה ב-3 שווה לשארית של סכום ספרות שלו בחלוקה ב-3.

אז אם למספרים $2026 + N$, $2026 \cdot N$ יש אותו סכום ספרות, יש לסכומי ספרות שלהם אותה שארית בחלוקה ב-3, ואז גם למספרים עצמם צריכה להיות אותה שארית בחלוקה ב-3.

שארית של 2026 בחלוקה ב-3 היא 1, אז שארית של $2026 \cdot N$ שווה לשארית של $1 \cdot N$, כלומר של N. שארית של $2026 + N$ בחלוקה ב-3 שווה לשארית של $N + 1$ בחלוקה ב-3, והיא שונה משארית של N בחלוקה ב-3.

אז ל-$2026 + N$, $2026 \cdot N$ תמיד יהיו שאריות שונות בחלוקה ב-3, ולכן לא קיים מספר טבעי N עבורו למספרים $2026 + N$, $2026 \cdot N$ יש אותו סכום ספרות.

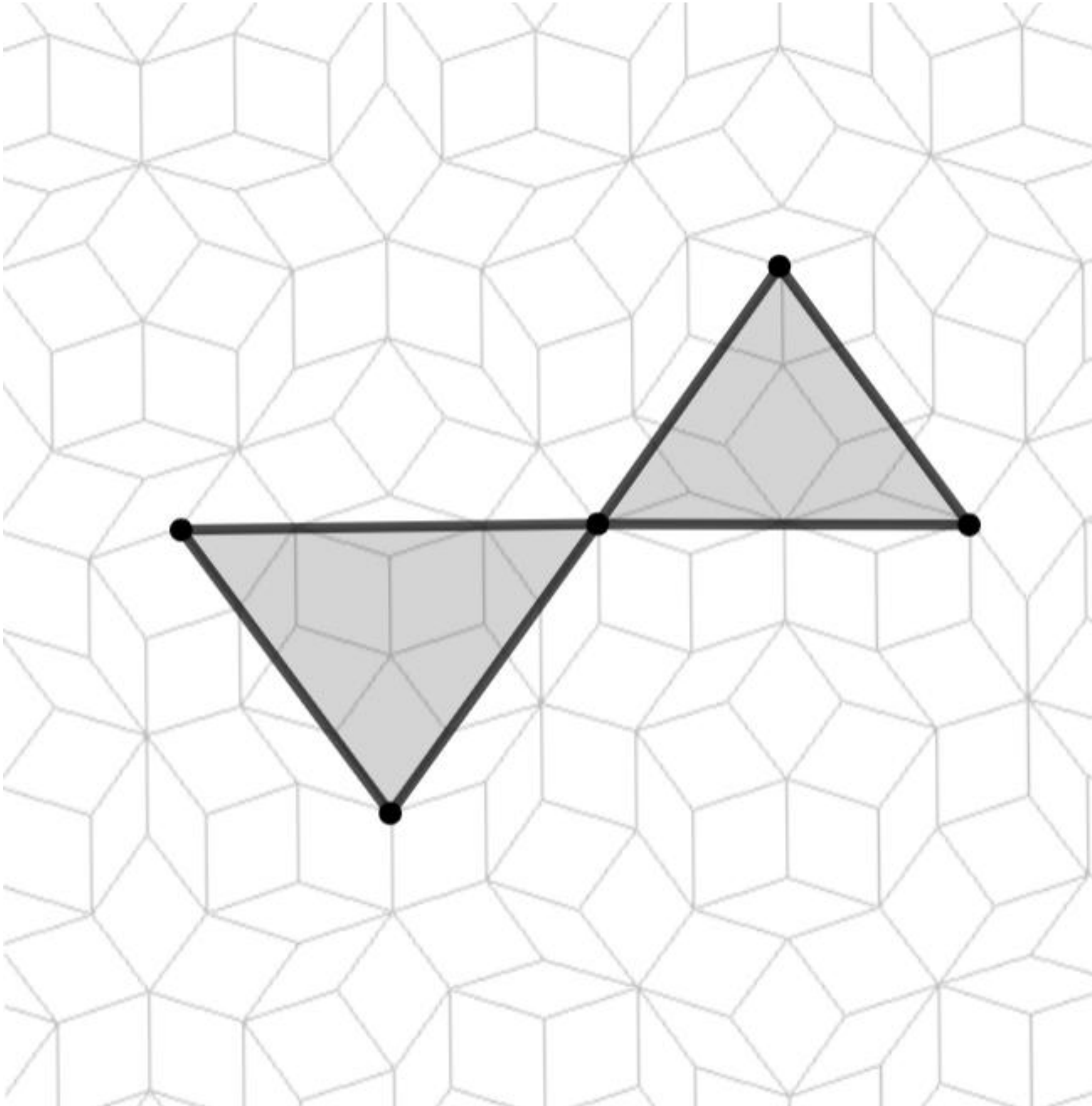
משך התחרות – 3 שעות. אסור להשתמש במחשבון או בכל מה שמכיל מחשבון. יש **לכבות** את כל הטלפונים.

יש לכתוב **בעט,** רק על הדפים הריקים שיחולקו על ידי המשגיחים, בצד אחד בלבד.

ניתן לפנות למשגיחים עם כל שאלה. קבלת עזרה מכל אחד אחר **אסורה בהחלט**.

שימו לב – בתחרות 6 שאלות. גם פתרונות חלקיים יכולים לתת חלק מנקודות על שאלה.

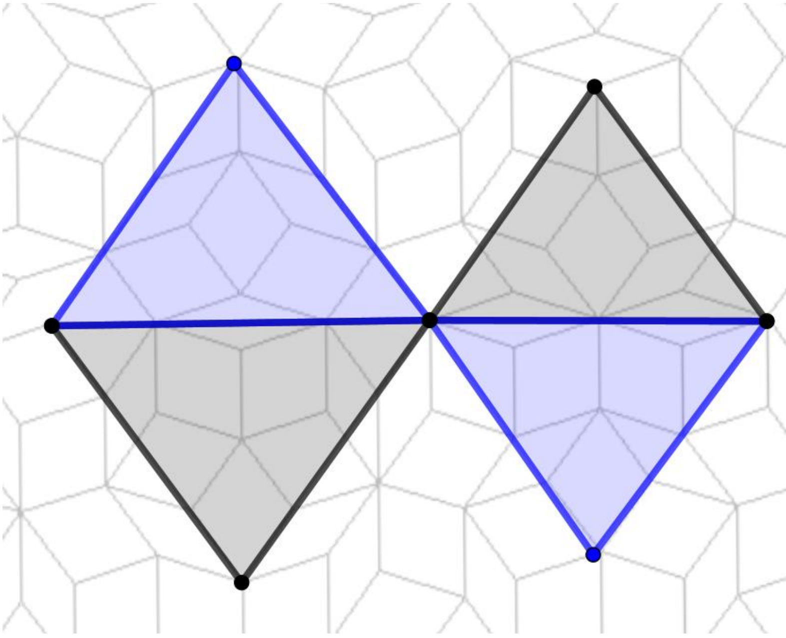
6. בציור הבא חלק של ריצוף פנרוז, המורכב ממעוינים. במעוינים הצרים הזוויות הן $36°, 144°$, ובמעוינים העבים – $72°, 108°$. מסומנים שני משולשים, עם קודקודים בקודקודי המעוינים, כמתואר בציור. מצאו את יחס השטחים של המשולשים המסומנים. (והוכיחו את טענתכם)



תשובה: 4:5

פתרון:

נצייר את השיקוף (תמונת מראה) של המשולשים ביחס לצלע האופקית, במתואר בציור הבא:



קודקודים של המשולשים החדשים גם יהיו בקודקודי המעויינים, כי אם נמקם את הקודקודים בקודקודי של מעויינים כמו בציור, המשולשים גם יהיו שווי שוקיים, ויהיה להם אותו גובה כמו למשולשים המקוריים:

למשולשים הימניים הגובה הוא צלע של מעויין + אלכסון ארוך של מעויין עבה, ולמשולשים השמאליים הגובה הוא צלע של מעויין + אלכסון ארוך של מעויין עבה + חצי אלכסון קטן של מעויין צר.

נסמן את שטח המעויין הצר ב-a, ואת שטח המעויין העבה ב-b. אז שטח המשולש הכחול הימני הוא 4 חצאים של מעויינים צרים ועוד 3 ושני חצאים של מעויינים עבים, כלומר $2a+4b$. שטח המולש הכחול השמאלי הוא $2.5a+5b$, ולכן היחס בין שטחי המשולשים הוא

$$\frac{2a+4b}{2.5a+5b}=\frac{4\cdot(0.5a+b)}{5\cdot(0.5a+b)}=4:5$$

בהצלחה!