



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה

כיתות ו'ז'

שלב הגמר, שנת תשפ"ו

משך התחרות – 3 שעות. אסור להשתמש במחשבון או בכל מה שמכיל מחשבון. יש לכבות את כל הטלפונים. יש לכתוב בעט, רק על הדפים הריקים שיחולקו על ידי המשגיחים, בצד אחד בלבד. ניתן לפנות למשגיחים עם כל שאלה. קבלת עזרה מכל אחד אחר **אסורה בהחלט**. שימו לב – בתחרות 6 שאלות. גם פתרונות חלקיים יכולים לתת חלק מנקודות על שאלה.

1. לאיליה יש מאזניים שמראים משקל מדויק של מה ששוקלים עליהם. לאיליה יש 6 תפוחים: מתוכם 4 אמיתיים, כולם שוקלים אותו משקל, תפוח פלסטיק אחד ששוקל פחות מתפוח אמיתי, ותפוח מתכתי שמשקלו גדול ממשקל שני תפוחים אמיתיים. כיצד ניתן לגלות את המשקלים של שלושת סוגי התפוחים באמצעות 4 שקילות על המאזניים? (כששוקלים את התפוחים לא יודעים ממה הם עשויים)

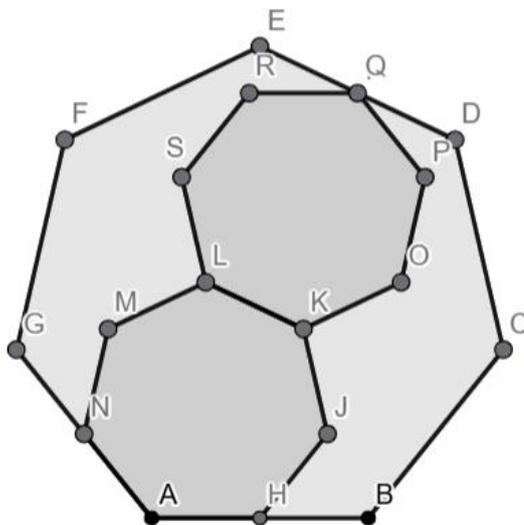
2. נבו רשם במחברת שלו 4 מספרים שלמים חיוביים. הוא רשם את כל 6 תרגילי החיבור שאפשר לקבל מחיבור של שניים מהמספרים האלה, ואת כל 4 תרגילי החיבור שאפשר לקבל מחיבור של שלושה מהמספרים האלה. את כל 10 התוצאות הוא רשם בדף נפרד, בסדר עולה. אלה 10 התוצאות שהוא קיבל: 9, 23, 28, 30, 82, 87, 89, 101, 103, 108 מצאו את ארבעת המספרים המקוריים.

3. בשוויון הבא ספרות זהות הוחלפו באותיות זהות, וספרות שונות – באותיות שונות. שחזרו את המספרים המקוריים (בשאלה זו אין צורך להוכיח):

$$\frac{A}{B} + \frac{B}{A} + \frac{B}{C} + \frac{C}{B} + \frac{A}{C} + \frac{C}{A} = AB$$

הערה: AB הוא המספר הדו-ספרתי AB, ולא מכפלה של A ו-B.

4. בציור הבא 3 משובעים משוכללים: $ABCDEF, AHJKLMN, LKOPQRS$. נתון כי N, H הם אמצעי קטעים AG, AB בהתאמה. הוכיחו כי Q נמצא על קטע DE .





האולימפיאדה הארצית במתמטיקה

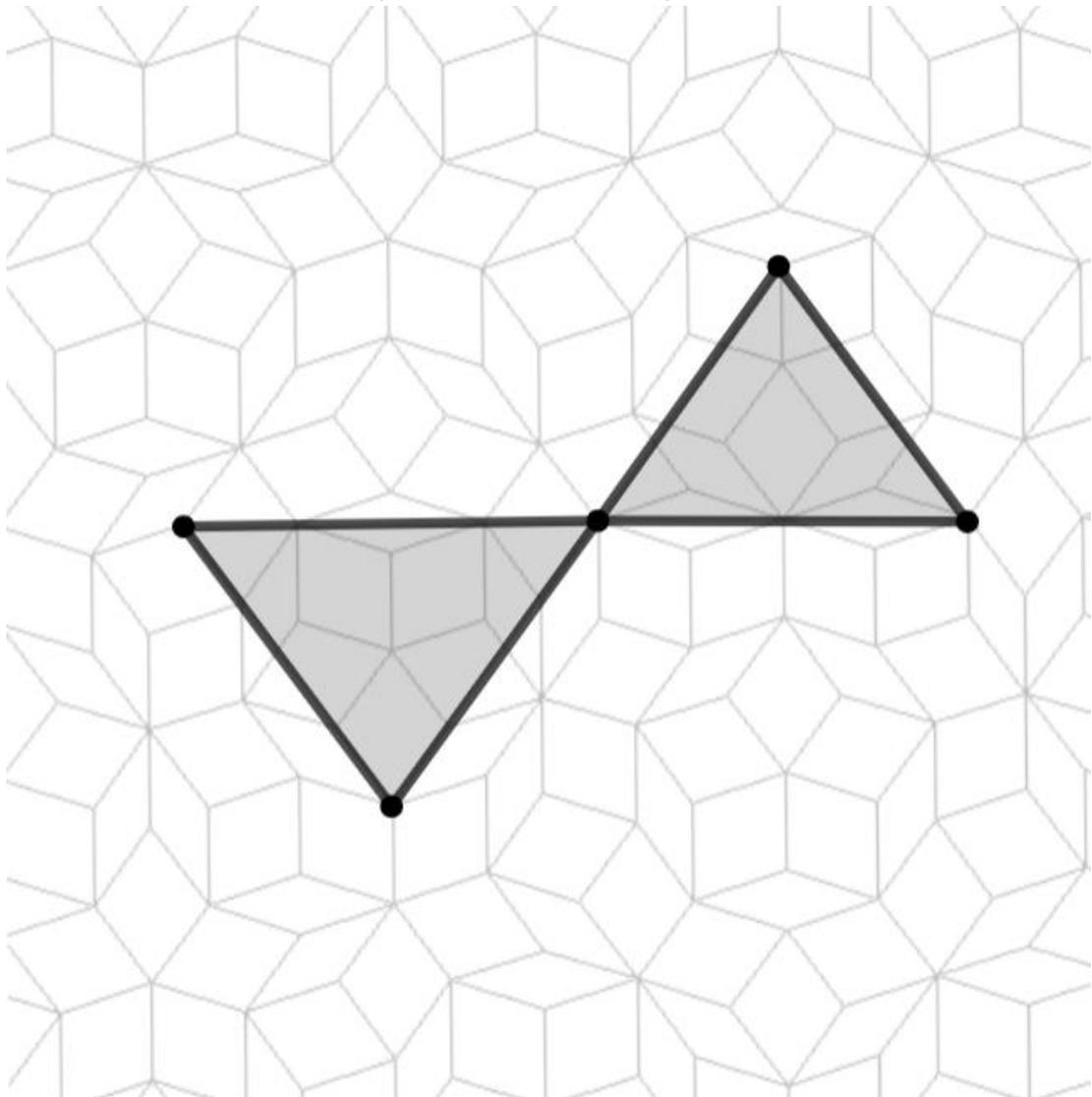
כיתות ו'ז'

שלב הגמר, שנת תשפ"ו

משך התחרות – 3 שעות. אסור להשתמש במחשבון או בכל מה שמכיל מחשבון. יש לכבות את כל הטלפונים. יש לכתוב בעט, רק על הדפים הריקים שיחולקו על ידי המשגיחים, בצד אחד בלבד. ניתן לפנות למשגיחים עם כל שאלה. קבלת עזרה מכל אחד אחר **אסורה בהחלט**. שימו לב – בתחרות 6 שאלות. גם פתרונות חלקיים יכולים לתת חלק מנקודות על שאלה.

5. האם קיים מספר טבעי N עבורו למספרים $2026 + N$, $2026 \cdot N$ יש אותו סכום ספרות? (סכום ספרות הוא סכום של כל הספרות של המספר)

6. בציור הבא חלק של ריצוף פנרוז, המורכב ממעוינים. במעוינים הצרים הזוויות הן 36° , 144° , ובמעוינים העבים – 72° , 108° . מסומנים שני משולשים, עם קודקודים בקודקודי המעוינים, כמתואר בציור. מצאו את יחס השטחים של המשולשים המסומנים. (והוכיחו את טענתכם)



בהצלחה!