



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה כיתות ח'-ט'

שלב הגמר, שנת תשפ"ו

משך התחרות – 3 שעות. אסור להשתמש במחשבון או בכל מה שמכיל מחשבון. יש לכבות את כל הטלפונים. יש לכתוב בעט, רק על הדפים הריקים שיחולקו על ידי המשגיחים, בצד אחד בלבד. ניתן לפנות למשגיחים עם כל שאלה. קבלת עזרה מכל אחד אחר אסורה בהחלט. שימו לב – בתחרות 6 שאלות. גם פתרונות חלקיים יכולים לתת חלק מנקודות על שאלה.

1. לאיליה יש מאזניים שמראים משקל מדויק של מה ששוקלים עליהם. לאיליה יש 8 תפוחים: מתוכם 6 אמיתיים, כולם שוקלים אותו משקל, תפוח פלסטיק אחד ששוקל פחות מתפוח אמיתי, ותפוח מתכתי שמשקלו גדול ממשקל שני תפוחים אמיתיים. כיצד ניתן לגלות את המשקלים של שלושת סוגי התפוחים באמצעות 4 שקילות על המאזניים? (כששוקלים את התפוחים לא יודעים ממה הם עשויים)

פתרון:

נסמן את המשקל של תפוח פלסטיק ב- a , של תפוח אמיתי ב- b ושל תפוח מתכת ב- c . נתון כי $a < b, 2b < c$. בשקילה ראשונה נשקול את כל התפוחים ביחד ונקבל $a + 6b + c$.

עכשיו ננסה למצוא את התפוח המתכתי.

בשקילה השנייה נשקול את 4 התפוחים הראשונים. נחשב גם את המשקל של 4 התפוחים הנותרים. נבחר את הרביעיה הכבדה יותר – התפוח המתכתי שם, כי גם אם התפוח מפלסטיק שם, עדיין $a + c > 2b$, כלומר ביחד הם כבדים מ-2 תפוחים אמיתיים.

בשקילה השלישית נחלק את הרביעיה הכבדה ל-2 קבוצות של 2, ונשקול את אחת מהן. נחשב גם את המשקל של הזוג השני, ונבחר את הכבד מבינם. בשקילה הרביעית נשקול את אחד התפוחים מהזוג הכבד. נחשב את המשקל של התפוח השני. התפוח היותר כבד הוא המתכתי. עכשיו נשאר לחשב את שאר המשקלים. יש לנו 3 קבוצות של תפוחים בנוסף לתפוח המתכתי, ולכל אחת מהקבוצות אנחנו יודעים את משקלה:



ניקח את המשקל של התפוח הבודד, נחלק ב-2 את המשקל של זוג תפוחים, וב-4 את המשקל של רביעיית תפוחים. קיבלנו 3 משקלים. בגלל שב-2 מהקבוצות יש רק תפוחים אמיתיים – שניים מהמשקלים שקיבלנו חייבים להיות שווים זה לזה ולמשקל של תפוח אמיתי. גילינו את המשקל של תפוח אמיתי. מכאן אנחנו יודעים באיזו קבוצה יש תפוח מפלסטיק ומחשבים גם את משקלו.



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה כיתות ח'-ט'

שלב הגמר, שנת תשפ"ו

משך התחרות – 3 שעות. אסור להשתמש במחשבון או בכל מה שמכיל מחשבון. יש **לכבות** את כל הטלפונים. יש לכתוב **בעט**, רק על הדפים הריקים שיחולקו על ידי המשגיחים, בצד אחד בלבד. ניתן לפנות למשגיחים עם כל שאלה. קבלת עזרה מכל אחד אחר **אסורה בהחלט**. שימו לב – בתחרות 6 שאלות. גם פתרונות חלקיים יכולים לתת חלק מנקודות על שאלה.

2. במעגל יושבים 30 אנשים במרווחים שווים, כל אחד מהם דובר אמת או שקרן.

דוברי אמת תמיד אומרים אמת, ושקרנים אף פעם לא אומרים אמת. ידוע שלפחות אחד מהאנשים הוא שקרן.

כל אחד מהאנשים אמר את המשפט הבא:

"שני השכנים שלי דוברי אמת, או בדיוק מולי יושב שקרן" (או גם וגם)

כמה שקרנים יכולים להיות במעגל הזה? מצאו את כל האפשרויות והוכיחו כי אין אפשרויות אחרות.

תשובה: 15

פתרון:

שלילה של המשפט "שני השכנים שלי דוברי אמת, או בדיוק מולי יושב שקרן" היא "לפחות אחד מהשכנים שלי שקרן, וגם בדיוק מולי יושב דובר אמת". לכן מול כל שקרן חייב לשבת דובר אמת.

אם מול איזשהו דובר אמת יושב דובר אמת, אז לידו וליד דובר אמת שממולו חייבים לשבת שני דוברי אמת, וכך הלאה, ובכל המעגל כולם יהיו דוברי אמת ולא יהיה אף שקרן, בסתירה לנתון שיש לפחות שקרן אחד. לכן מול כל דובר אמת חייב לשבת שקרן, כלומר אפשר לחלק את כל האנשים ל-15 זוגות, ובכל זוג יהיה שקרן אחד ודובר אמת אחד. לכן יכולים להיות רק 15 שקרנים. דוגמה: 15 שקרנים רצוף ואז 15 דוברי אמת רצוף.

הערה:

יש הרבה דרכים בהם האנשים יכולים להיות מסודרים. התנאי המדוייק הוא שמול כל שקרן יושב דובר אמת ומול כל דובר אמת יושב שקרן, וליד כל אחד יושב לפחות עוד מישהו אחד מאותו הסוג.



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה כיתות ח'-ט'

שלב הגמר, שנת תשפ"ו

משך התחרות – 3 שעות. אסור להשתמש במחשבון או בכל מה שמכיל מחשבון. יש לכבות את כל הטלפונים. יש לכתוב בעט, רק על הדפים הריקים שיחולקו על ידי המשגיחים, בצד אחד בלבד. ניתן לפנות למשגיחים עם כל שאלה. קבלת עזרה מכל אחד אחר אסורה בהחלט. שימו לב – בתחרות 6 שאלות. גם פתרונות חלקיים יכולים לתת חלק מנקודות על שאלה.

3. מצאו את הערך המינימלי של הביטוי הבא, כאשר x, y מספרים ממשיים:

$$(x - y)^2 + (xy + 26)^2$$

תשובה: 100

פתרון:

אם שני הביטויים שבתוך הריבועים היו יכולים להיות 0 בו-זמנית – הערך המינימלי היה 0. הם לא יכולים להיות 0 בו-זמנית, אז ננסה להביא את הביטוי לצורה של סכום ריבועים שיכולים להיות 0 בו-זמנית, ועוד מספר קבוע.

$$\begin{aligned}(x - y)^2 + (xy + 26)^2 &= x^2 - 2xy + y^2 + x^2y^2 + 2 \cdot 26 \cdot xy + 26^2 = \\ &= x^2 + 2xy + y^2 + x^2y^2 + 2 \cdot 24xy + 26^2 = \\ &= (x + y)^2 + (xy + 24)^2 + 26^2 - 24^2\end{aligned}$$

המספרים $x + y, xy + 24$ יכולים להיות 0 בו-זמנית כאשר

$$x = \sqrt{24}, y = -\sqrt{24}$$

ובמקרה הזה הביטוי המקורי שווה ל-

$$26^2 - 24^2 = (26 - 24)(26 + 24) = 100$$

אחרת הביטוי יהיה גדול מ-100, לכן 100 הוא הערך המינימלי של הביטוי.



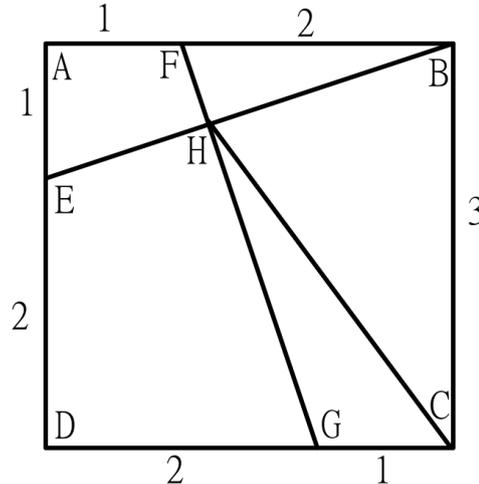
האולימפיאדה הארצית במתמטיקה

כיתות ח'-ט'

שלב הגמר, שנת תשפ"ו

משך התחרות – 3 שעות. אסור להשתמש במחשבון או בכל מה שמכיל מחשבון. יש לכבות את כל הטלפונים. יש לכתוב בעט, רק על הדפים הריקים שיחולקו על ידי המשגיחים, בצד אחד בלבד. ניתן לפנות למשגיחים עם כל שאלה. קבלת עזרה מכל אחד אחר אסורה בהחלט. שימו לב – בתחרות 6 שאלות. גם פתרונות חלקיים יכולים לתת חלק מנקודות על שאלה.

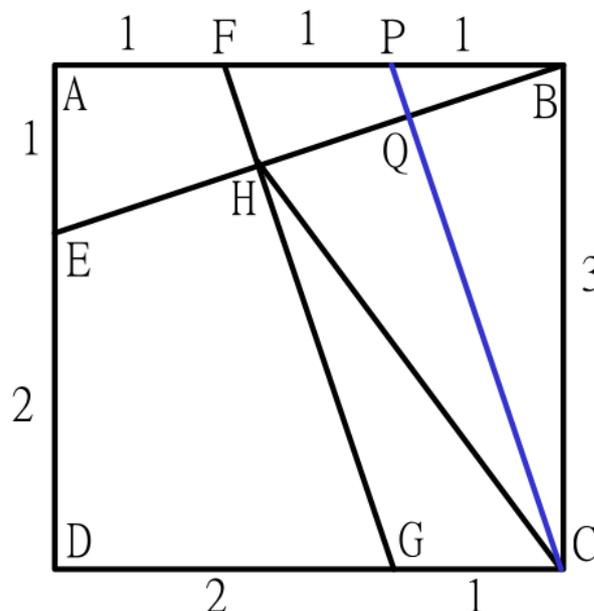
4. נתון ריבוע $ABCD$, עם צלעות באורך 3. נקודות E, F, G מקיימות $CG = EA = AF = 1$, $GD = DE = FB = 2$. קטע BE פוגש את הקטע FG בנקודה H . מצאו את אורך הקטע CH .



תשובה: 3

פתרון ראשון:

נשלים את FGC למקבילית $FGCP$, ונסמן ב- Q את המפגש של PC, EB . אז $FP = PB = 1$, PQ מקביל ל- FH , אז גם $HQ = QB$. מצד שני המשולשים AEB, BPC חופפים ומסובבים 90° אחד ביחס לשני, לכן PC מאונך ל- EB , כלומר CQ הוא תיכון וגובה במשולש BCH , ולכן $BC = CH$ (כי משולש בו תיכון הוא גובה – שווה שוקיים). לכן $CH = 3$.





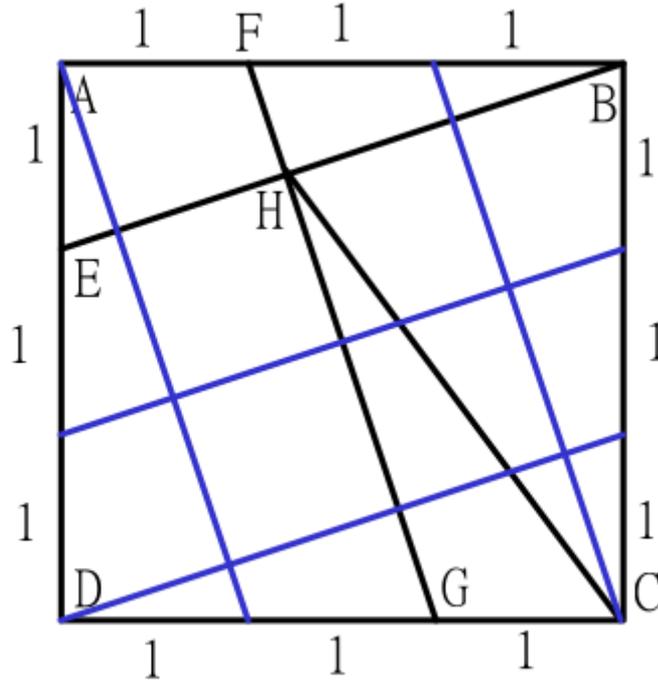
האולימפיאדה הארצית במתמטיקה כיתות ח'-ט'

שלב הגמר, שנת תשפ"ו

משך התחרות – 3 שעות. אסור להשתמש במחשבון או בכל מה שמכיל מחשבון. יש לכבות את כל הטלפונים.
יש לכתוב בעט, רק על הדפים הריקים שיחולקו על ידי המשגיחים, בצד אחד בלבד.
ניתן לפנות למשגיחים עם כל שאלה. קבלת עזרה מכל אחד אחר **אסורה בהחלט**.
שימו לב – בתחרות 6 שאלות. גם פתרונות חלקיים יכולים לתת חלק מנקודות על שאלה.

פתרון שני:

נעביר קווים במקביל ל- BE ו- FG במרחקים שווים, כמתואר בציור. נקבל סריג ריבועי. כדי להגיע מ- C ל- B צריך ללכת 3 משבצות בכיוון אחד, ו-1 בכיוון המאונך. כך גם כדי להגיע מ- C ל- H , לכן $HC = BC = 3$.





האולימפיאדה הארצית במתמטיקה
כיתות ח'-ט'

שלב הגמר, שנת תשפ"ו

משך התחרות – 3 שעות. אסור להשתמש במחשבון או בכל מה שמכיל מחשבון. יש לכבות את כל הטלפונים.
יש לכתוב בעט, רק על הדפים הריקים שיחולקו על ידי המשגיחים, בצד אחד בלבד.
ניתן לפנות למשגיחים עם כל שאלה. קבלת עזרה מכל אחד אחר אסורה בהחלט.
שימו לב – בתחרות 6 שאלות. גם פתרונות חלקיים יכולים לתת חלק מנקודות על שאלה.

5. האם קיים מספר טבעי N עבורו למספרים $2026 + N$, $2026 \cdot N$ יש אותו

סכום ספרות? (סכום ספרות הוא סכום של כל הספרות של המספר)

תשובה: לא קיים

פתרון:

שארית של מספר בחלוקה ב-3 שווה לשארית של סכום ספרות שלו בחלוקה ב-3.

אז אם למספרים $2026 + N$, $2026 \cdot N$ יש אותו סכום ספרות, יש לסכומי ספרות שלהם אותה שארית בחלוקה ב-3, ואז גם למספרים עצמם צריכה להיות אותה שארית בחלוקה ב-3.

שארית של 2026 בחלוקה ב-3 היא 1, אז שארית של $2026 \cdot N$ שווה לשארית של $1 \cdot N$, כלומר של N . שארית של $2026 + N$ בחלוקה ב-3 שווה לשארית של $1 + N$ בחלוקה ב-3, והיא שונה משארית של N בחלוקה ב-3. אז ל- $2026 + N$, $2026 \cdot N$ תמיד יהיו שאריות שונות בחלוקה ב-3, ולכן לא קיים מספר טבעי N עבורו למספרים $2026 + N$, $2026 \cdot N$ יש אותו סכום ספרות.

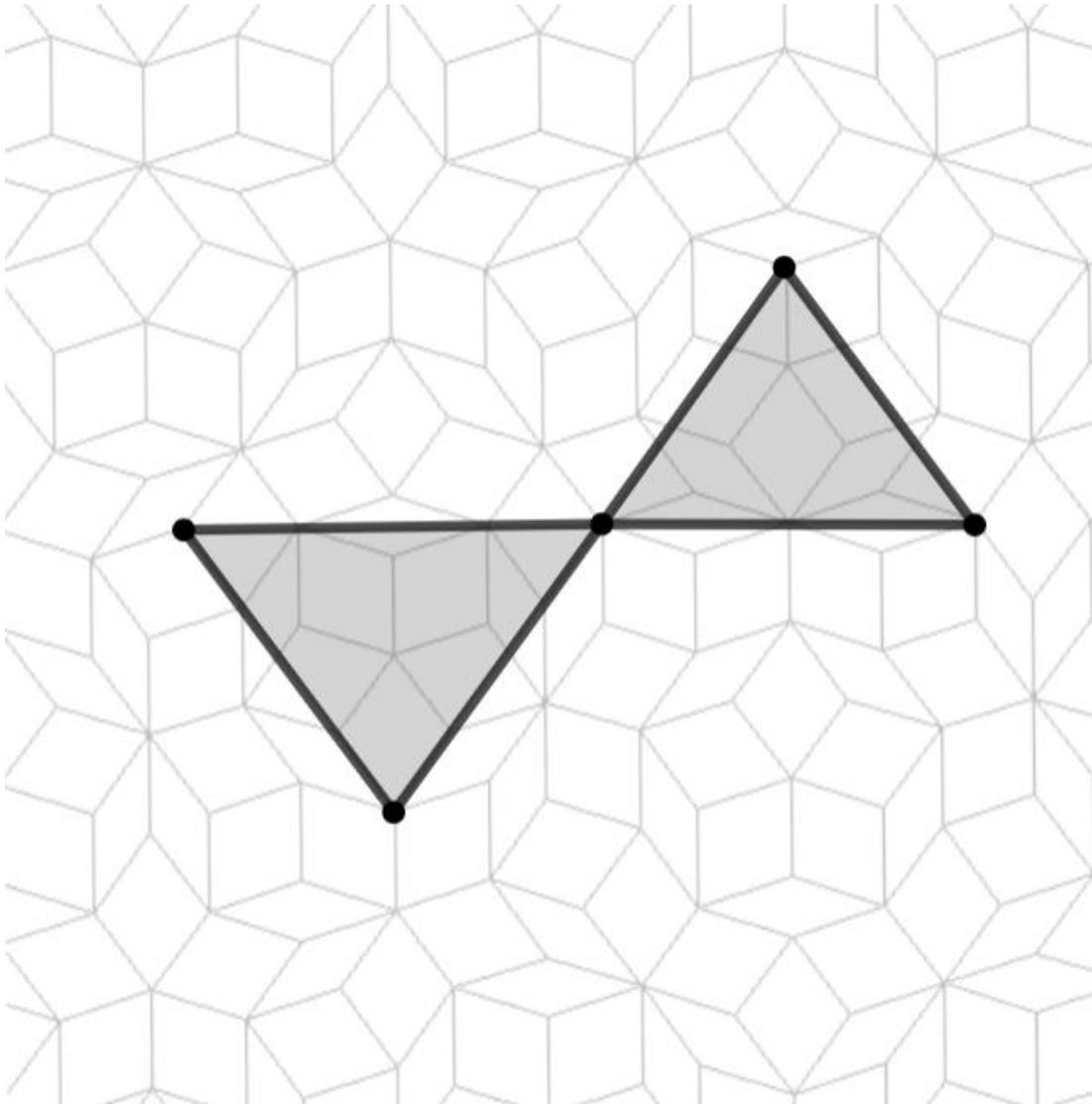


האולימפיאדה הארצית במתמטיקה כיתות ח'-ט'

שלב הגמר, שנת תשפ"ו

משך התחרות – 3 שעות. אסור להשתמש במחשבון או בכל מה שמכיל מחשבון. יש לכבות את כל הטלפונים. יש לכתוב **בעט**, רק על הדפים הריקים שיחולקו על ידי המשגיחים, בצד אחד בלבד. ניתן לפנות למשגיחים עם כל שאלה. קבלת עזרה מכל אחד אחר **אסורה בהחלט**. שימו לב – בתחרות 6 שאלות. גם פתרונות חלקיים יכולים לתת חלק מנקודות על שאלה.

6. **בציור הבא חלק של ריצוף פנרוז, המורכב ממעוינים. במעוינים הצרים הזוויות הן $36^\circ, 144^\circ$, ובמעוינים העבים – $72^\circ, 108^\circ$. מסומנים שני משולשים, עם קודקודים בקודקודי המעוינים, כמתואר בציור. מצאו את יחס השטחים של המשולשים המסומנים. (והוכיחו את טענתכם)**





האולימפיאדה הארצית במתמטיקה

כיתות ח'-ט'

שלב הגמר, שנת תשפ"ו

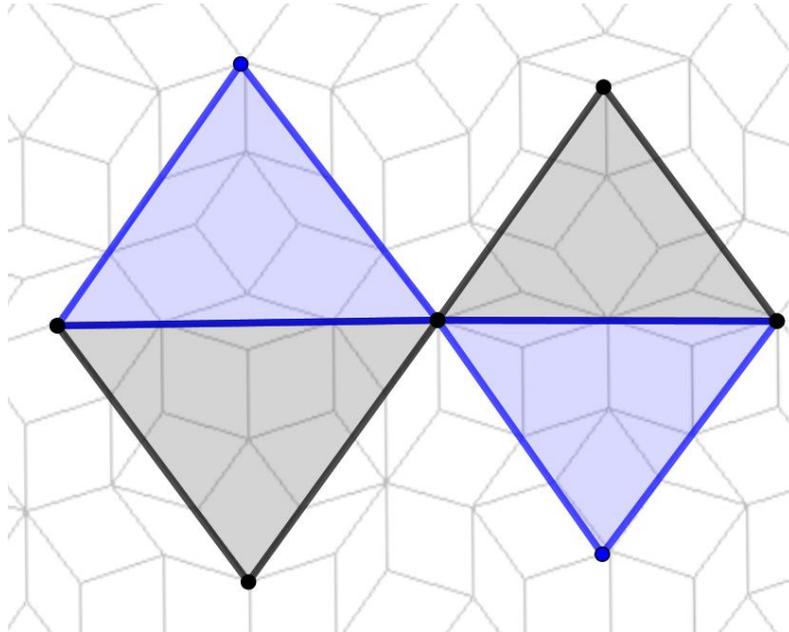
משך התחרות – 3 שעות. אסור להשתמש במחשבון או בכל מה שמכיל מחשבון. יש לכבות את כל הטלפונים. יש לכתוב בעט, רק על הדפים הריקים שיחולקו על ידי המשגיחים, בצד אחד בלבד. ניתן לפנות למשגיחים עם כל שאלה. קבלת עזרה מכל אחד אחר **אסורה בהחלט**. שימו לב – בתחרות 6 שאלות. גם פתרונות חלקיים יכולים לתת חלק מנקודות על שאלה.

תשובה: 4:5

פתרון:

נצייר את השיקוף (תמונת מראה) של המשולשים ביחס לצלע האופקית,

במתואר בצירוף הבא:



קודקודים של המשולשים החדשים גם יהיו בקודקודי המעויינים, כי אם נמקם את הקודקודים בקודקודי של מעויינים כמו בצירוף המשולשים גם יהיו שווי שוקיים, ויהיה להם אותו גובה כמו למשולשים המקוריים: למשולשים הימניים הגובה הוא צלע של מעויין + אלכסון ארוך של מעויין עבה, ולמשולשים השמאליים הגובה הוא צלע של מעויין + אלכסון ארוך של מעויין עבה + חצי אלכסון קטן של מעויין צר.

נסמן את שטח המעויין הצר ב- a , ואת שטח המעויין העבה ב- b . אז שטח המשולש הכחול הימני הוא 4 חצאים של מעויינים צרים ועוד 3 ושני חצאים של מעויינים עבים, כלומר $2a + 4b$. שטח המשולש השמאלי הוא $2.5a + 5b$, ולכן היחס בין שטחי המשולשים הוא

$$\frac{2a + 4b}{2.5a + 5b} = \frac{4 \cdot (0.5a + b)}{5 \cdot (0.5a + b)} = 4:5$$

בהצלחה!