



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה
כיתות ח'-ט'

שלב הגמר, שנת תשפ"ו

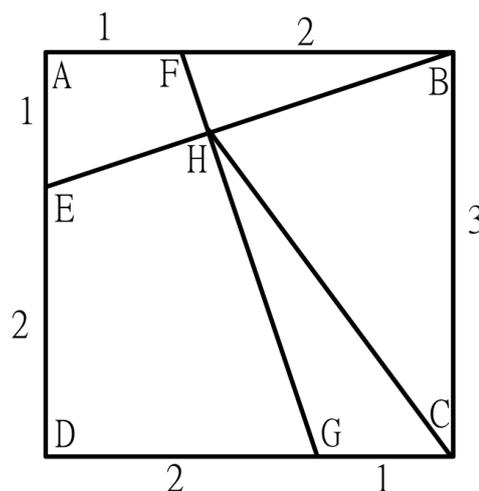
משך התחרות – 3 שעות. אסור להשתמש במחשבון או בכל מה שמכיל מחשבון. יש לכבות את כל הטלפונים. יש לכתוב בעט, רק על הדפים הריקים שיחולקו על ידי המשגיחים, בצד אחד בלבד. ניתן לפנות למשגיחים עם כל שאלה. קבלת עזרה מכל אחד אחר אסורה בהחלט. שימו לב – בתחרות 6 שאלות. גם פתרונות חלקיים יכולים לתת חלק מנקודות על שאלה.

1. לאיליה יש מאזניים שמראים משקל מדויק של מה ששוקלים עליהם. לאיליה יש 8 תפוחים: מתוכם 6 אמיתיים, כולם שוקלים אותו משקל, תפוח פלסטיק אחד ששוקל פחות מתפוח אמיתי, ותפוח מתכתי שמשקלו גדול ממשקל שני תפוחים אמיתיים. כיצד ניתן לגלות את המשקלים של שלושת סוגי התפוחים באמצעות 4 שקילות על המאזניים? (כששוקלים את התפוחים לא יודעים ממה הם עשויים)

2. במעגל יושבים 30 אנשים במרווחים שווים, כל אחד מהם דובר אמת או שקרן. דוברי אמת תמיד אומרים אמת, ושקרנים אף פעם לא אומרים אמת. ידוע שלפחות אחד מהאנשים הוא שקרן. כל אחד מהאנשים אמר את המשפט הבא:
"שני השכנים שלי דוברי אמת, או בדיוק מולי יושב שקרן" (או גם וגם)
כמה שקרנים יכולים להיות במעגל הזה? מצאו את כל האפשרויות והוכיחו כי אין אפשרויות אחרות.

3. מצאו את הערך המינימלי של הביטוי הבא, כאשר x, y מספרים ממשיים:
 $(x - y)^2 + (xy + 26)^2$

4. נתון ריבוע $ABCD$, עם צלעות באורך 3. נקודות E, F, G מקיימות $GD = DE = FB = 2$, $CG = EA = AF = 1$ פוגש את הקטע FG בנקודה H . מצאו את אורך הקטע CH .





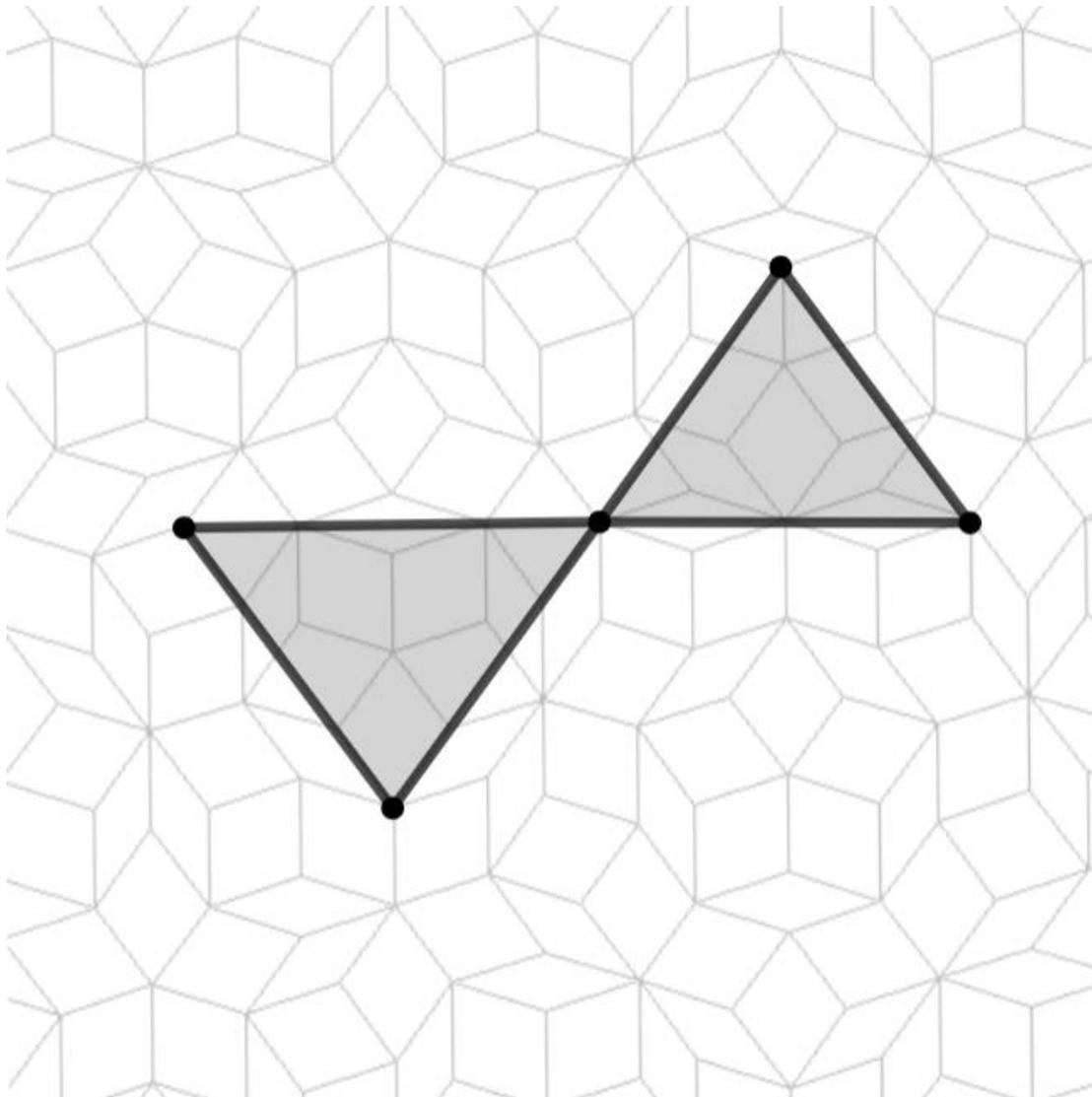
האולימפיאדה הארצית במתמטיקה
כיתות ח'-ט'

שלב הגמר, שנת תשפ"ו

משך התחרות – 3 שעות. אסור להשתמש במחשבון או בכל מה שמכיל מחשבון. יש לכבות את כל הטלפונים. יש לכתוב בעט, רק על הדפים הריקים שיחולקו על ידי המשגיחים, בצד אחד בלבד. ניתן לפנות למשגיחים עם כל שאלה. קבלת עזרה מכל אחד אחר **אסורה בהחלט**. שימו לב – בתחרות 6 שאלות. גם פתרונות חלקיים יכולים לתת חלק מנקודות על שאלה.

5. האם קיים מספר טבעי N עבורו למספרים $2026 + N$, $2026 \cdot N$ יש אותו סכום ספרות? (סכום ספרות הוא סכום של כל הספרות של המספר)

6. בציור הבא חלק של ריצוף פנרוז, המורכב ממעוינים. במעוינים הצרים הזוויות הן 36° , 144° , ובמעוינים העבים – 108° , 72° . מסומנים שני משולשים, עם קודקודים בקודקודי המעוינים, כמתואר בציור. מצאו את יחס השטחים של המשולשים המסומנים. (והוכיחו את טענתכם)



בהצלחה!